33

Dirk J. Struik — HISTÓRIA CONCISA DAS MATEMÁTICAS

Dirk J. Struik

HISTÓRIA CONCISA DAS MATEMÁTICAS

CIÊNCIA ABERTA

HISTÓRIA CONCISA DAS MATEMÁTICAS

Dirk Jan Struik nasceu em Roterdão, Holanda, em 1894, e, já perto de ser centenário, continua activo na história da matemática, assunto a que passou a dedicar-se a tempo inteiro a partir dos anos 60. Até aí mantinha-se como investigador matemático, convivendo com figuras do seu tempo, como David Hilbert ou Norbert Wiener.

Foi marcado, segundo as suas próprias palavras, pelo «terreno histórico da Itália», onde viveu na década de 20, daí partindo para Göttingen, o grande centro matemático da época, e depois para o MIT, nos Estados Unidos, onde se fixou. As suas ideias progressistas causaram-lhe dificuldades no pós-guerra, sendo os seus estudos sobre as relações históricas entre a matemática e a sociedade encarados como uma ousadia.

O seu ponto de vista, porém, revelar-se-ia fecundo, do que é testemunho este livro; ao mesmo tempo, aponta para um critério de análise do material histórico que torna possível uma grande concisão.

A tradução da presente *História Concisa das Matemáticas* em pelo menos dezasseis línguas, a partir de edições sempre actualizadas, atesta o acolhimento da obra em todo o mundo.



Dirk Struik com a mulher — a quem também dedicou este livro — em 1987.

Sobre o Tradutor:

João Cosme Santos Guerreiro (1923-1987) foi matemático e professor ilustre que marcou gerações de estudantes na Faculdade de Ciências de Lisboa.

Considerava-se «um produto da escola de 40», assim reivindicando a sua filiação a nomes como António Aniceto Monteiro e José Sebastião e Silva, entre outros, sendo discípulo e colaborador deste último. A concepção que tinha da matemática, enraizada na história —timbre daquela escola—, levá-lo-ia a leccionar durante anos, e até ao fim da vida, uma cadeira de História do Pensamento Matemático e a empreender com grande empenho a tradução deste livro, embora não pudesse terminá-la nem incluir uma nota sobre a história da matemática em Portugal, como era seu desejo.

ISBN 972-662-251-4



CIÊNCIA ABERTA




gradiva

CIÊNCIA ABERTA

1. O JOGO DOS POSSÍVEIS
François Jacob
2. UM POUCO MAIS DE AZUL
H. Reeves
3. O NASCIMENTO DO HOMEM
Robert Clarke
4. A PRODIGIOSA AVENTURA
DAS PLANTAS
Jean-Maire Pelt/Jean-Pierre Cuny
5. COSMOS
Carl Sagan
6. A MEDUSA E O CARACOL
Lewis Thomas
7. O MACACO, A ÁFRICA E O HOMEM
Yves Coppens
8. OS DRAGÕES DO ÉDEN
Carl Sagan
9. UM MUNDO IMAGINADO
June Goodfield
10. O CÓDIGO CÓSMICO
Heinz R. Pagels
11. CIÊNCIA: CURIOSIDADE
E MALDIÇÃO
Jorge Dias de Deus
12. O POLEGAR DO PANDA
Stephen Jay Gould
13. A HORA DO DESLUMBRAMENTO
H. Reeves
14. A NOVA ALIANÇA
Ilya Prigogine/Isabelle Stengers
15. PONTES PARA O INFINITO
Michael Guillen
16. O FOGO DE PROMETEU
Charles J. Lumsden/Edward O. Wilson
17. O CÉREBRO DE BROCA
Carl Sagan
18. ORIGENS
Robert Shapiro
19. A DUPLA HÉLICE
James Watson
20. OS TRÊS PRIMEIROS MINUTOS
Steven Weinberg
21. ESTÁ A BRINCAR, SR. FEYNMAN!
Richard P. Feynman
22. NOS BASTIDORES DA CIÊNCIA
Sebastião J. Formosinho
23. VIDA
Francis Crick
24. SUPERFORÇA
Paul Davies
25. QED - A ESTRANHA TEORIA
DA LUZ E DA MATÉRIA
Richard P. Feynman
26. A ESPUMA DA TERRA
Claude Allègre
27. BREVE HISTÓRIA DO TEMPO
Stephen W. Hawking
28. O JOGO
Manfred Eigen/Ruthild Winkler
29. EINSTEIN TINHA RAZÃO?
Clifford M. Will
30. PARA UMA NOVA CIÊNCIA
Steven Rose/Lise Appignanesi
31. A MÃO ESQUERDA DA CRIAÇÃO
John D. Barrow/Joseph Silk
32. O GENE EGOÍSTA
Richard Dawkins
33. HISTÓRIA CONCISA
DAS MATEMÁTICAS
Dirk J. Struik
34. CIÊNCIA, ORDEM E CRIATIVIDADE
David Bohm/F. David Peat
35. O QUE É UMA LEI FÍSICA
Richard P. Feynman
36. QUANDO AS GALINHAS TIVEREM DENTES
Stephen Jay Gould
37. «NEM SEMPRE A BRINCAR,
SR. FEYNMAN!»
Richard P. Feynman
38. CAOS - A CONSTUÇÃO
DE UMA NOVA CIÊNCIA
James Gleick
39. SIMETRIA PERFEITA
Heinz R. Pagels
40. ENTRE O TEMPO E A ETERNIDADE
Ilya Prigogine/Isabelle Stengers
41. OS SONHOS DA RAZÃO
Heinz R. Pagels
42. VIAGEM ÀS ESTRELAS
Robert Jastrow
43. MALICORNE
H. Reeves
44. INFINITO EM TODAS
AS DIRECÇÕES
Freeman J. Dyson
45. O ÁTOMO ASSOMBRADO
P. C. W. Davies/J. R. Brown
46. MATÉRIA PENSANTE
Jean-Pierre Changeaux e Alain Connes
47. A NATUREZA REEENCONTRADA
Jean-Marie Pelt
48. O CAMINHO
QUE NENHUM HOMEM TRILHOU
Carl Sagan/Richard Turco
49. O SORRISO DO FLAMINGO
Stephen Jay Gould
50. EM BUSCA DA UNIFICAÇÃO
Abdus Salam/Paul Dirac/Werner Heisenberg
51. OBJECTOS FRACTAIS
Benoit Mandelbrot
52. A QUARTA DIMENSÃO
Rudy Rucker
53. DEUS JOGA AOS DADOS?
Ian Stewart
54. OS PRÓXIMOS CEM ANOS
Jonathan Weiner
55. IDEIAS E INFORMAÇÃO
Arno Penzias

DIRK J. STRUIK

HISTÓRIA CONCISA DAS MATEMÁTICAS

TRADUÇÃO DE

JOÃO COSME SANTOS GUERREIRO

2.ª edição revista e ampliada

gradiva

Título original inglês: *A Concise History of Mathematics*

Tradução: *João Cosme Santos Guerreiro*
Revisão do texto: *Manuel Joaquim Vieira*
Capa: *Armando Lopes*
Fotocomposição, paginação e fotólitos: *Textype — Artes Gráficas, L.da*
Impressão e acabamento: *Tipografia Guerra/Viseu*

Rua de Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. — 1300 LISBOA
Telefs.: 3 97 40 67 / 8
2.ª edicção: *Abril/92*
Depósito legal n.º 44058/92

A pedido do revisor científico, adoptou-se em alguns termos a grafia tradicional no mundo matemático, embora a mesma colida com as normas ortográficas vigentes. Estão neste caso, por exemplo, *coseno* por *co-seno, cotangente* por *co-tangente, cosecante* por *co-secante, Herão* por *Héron*, etc. *(N. do R.)*

Agradecimentos

Os editores agradecem os préstimos amáveis da Dr.ª Maria João Guerreiro e do Dr. Paulo Almeida, que, em virtude do falecimento do Prof. Dr. João Cosme Santos Guerreiro, se prontificaram a compilar, organizar e rever o material traduzido, tornando assim possível a edição da presente obra.

Relativamente à 1.ª edição fizeram-se algumas correcções à tradução do capítulo IX e acrescentou-se um apêndice, da autoria dos Profs. José Joaquim Dionísio e A. J. Franco de Oliveira, da Faculdade de Ciências de Lisboa, sobre matemáticos portugueses que muito valoriza a presente edição.

Para a Ruth e a Rebekka

ÍNDICE

ÍNDICE DAS ILUSTRAÇÕES

PREFÁCIO À 4.ª EDIÇÃO REVISTA

Esta nova edição integra numerosas emendas e correcções e inclui bastantes aditamentos bibliográficos. Foi acrescentado um novo capítulo sobre as matemáticas da primeira metade do nosso século; no prefácio da edição anterior (de 1966) tinha manifestado o desejo de que tal história fosse escrita. Tentei eu próprio escrevê-la. O falecido Prof. P. B. Progrebysskiĭ*, tradutor do livro para russo, tratou o assunto num apêndice (2.ª edição da tradução, Moscovo, 1969) que também pode ser encontrado, traduzido, na 5.ª edição da tradução alemã (Berlim, 1972). A minha abordagem pessoal deste assunto complicado baseou-se, em parte, em Progrebysskiĭ e em várias monografias e capítulos de livros tais como os de C. Boyer, M. Kline, J. M. Dubbey, H. Wussing e outros, mas também na minha experiência pessoal. A minha versão é, mais uma vez, uma história «concisa»; ainda há espaço para uma história da matemática em larga escala desde o início do século até à segunda guerra mundial.

---

* As transliterações dos nomes russos no texto seguem o sistema utilizado em *Mathematical Reviews* e *Zentralblatt für Mathematik*. Como este sistema é de origem germânica, o «j» deve ser pronunciado como o «y» em inglês; além disso, a letra cirílica muitas vezes transliterada por «kh» aparece neste sistema como «h».

Depois da primeira publicação deste livro, apareceu uma edição na Grã-Bretanha e foram publicadas traduções em várias línguas. Em algumas dessas traduções foram acrescentados parágrafos ou secções tratando das matemáticas do país em que o livro aparecia. (Ver «Prefácio à 3.ª edição revista», nas páginas seguintes.) Apareceram mais algumas traduções do livro desde 1966. Para as traduções espanhola e italiana (pelos Profs. P. Lezama e U. Bottazzini, respectivamente) escrevi prefácios com resumos da história da matemática em Espanha e em Itália. A tradução italiana, além disso, foi enriquecida, pelo Prof. Botazzini, com uma monografia de 64 páginas sobre as matemáticas italianas do século XIX. A bibliografia nestes livros, assim como em outras traduções, contém títulos de interesse para os leitores dessas línguas.

O autor agradece ao Dr. Neugebauer a leitura dos primeiros capítulos da 1.ª edição, de que resultaram vários melhoramentos, assim como o generoso encorajamento que encontrou, confessando-se particularmente em dívida para com E. J. Dijksterhuis, S. A. Joffe, A. P. Juškevič, R. C. Archibald, K. R. Biermann e os tradutores deste livro em várias línguas.

Obrigado a todos os colegas que, através de revistas ou de correspondência, me fizeram sentir à vontade. Obrigado também à Dover Publications, Inc., por ter acedido prontamente a fazer uma nova edição.

DIRK J. STRUIK

Massachusetts Institute
of Technology (MIT), 1986

PREFÁCIO À 3.ª EDIÇÃO REVISTA

A primeira edição deste livro apareceu em 1948. Desde então, o acolhimento tem sido generoso, tanto neste país* como no estrangeiro, embora, ocasionalmente, os Soviéticos tenham manifestado algum descontentamento pelo aparente pouco relevo dado a Čebyšev, tal como sucedeu com Escoceses e Franceses pela aparente falta de respeito à memória de Gregory e de Roberval. Têm sido feitas várias traduções e, nalgumas, os tradutores acrescentaram material de interesse específico para os seus leitores. Deste modo, encontramos um capítulo sobre matemática russa nas traduções ucraniana (Kiev, 1961) e russa (Moscovo, 1964). Eu próprio, quando preparava a versão holandesa do livro (Utreque-Antuérpia, 1965), acrescentei artigos de interesse para os leitores holandeses. Estas edições, tal como a alemã (Berlim, 1961; 3.ª edição, 1965), também contêm dados bibliográficos de interesse especial para os países respectivos. Durante a realização destas traduções aproveitei a oportunidade para acrescentar emendas e correcções ao texto, de modo que o livro, através das suas diferentes edições, sofreu uma evolução gradual, embora não fundamental. Isto foi benéfico na preparação desta edição inglesa.

---

* O autor refere-se aos Estados Unidos. *(N. do T.)*

Um dia, um dos meus amigos de Pequim descobriu uma tradução chinesa (Pequim, 1956), que me enviou. O tradutor desta edição elogiou o livro, mas pôs objecções em relação ao tratamento das matemáticas chinesas. Como eu próprio já tinha algumas dúvidas a esse respeito, reescrevi a parte relativa a este assunto. Nesta edição, a antiga matemática chinesa aparece, tal como lhe compete, como uma parte integral das matemáticas medievais e pré-medievais, e não como um fenómeno exterior às principais correntes do desenvolvimento científico.

Esta nova edição acompanha a história das matemáticas até ao final do século XIX, que em 1966 já se encontra muito distante. Chegou a altura de escrever a história das matemáticas de 1900 e 1950, pelo menos na forma de uma «história concisa». Ninguém parece tê-lo tentado, apesar de existirem algumas monografias. Isto contrasta com o facto de abundarem no mercado histórias da física do século XX. Embora esta história tenha a vantagem de ser mais espectacular e (pelo menos em alguns aspectos importantes) mais facílmente entendida, o período que começa em Poincaré, Hilbert, Lebesgue, Peano, Hardy e Levi-Civita oferece material em abundância para uma história fascinante das matemáticas, tanto no seu domínio próprio como em relação à lógica, à física e à engenharia. Qual de vós, caros leitores, irá tomar essa iniciativa?

DIRK J. STRUIK

Massachusetts Institute
of Technology (MIT), Junho, 1966

Introdução

1

A matemática é uma grande aventura nas ideias; a sua história reflecte alguns dos mais nobres pensamentos de inúmeras gerações. Somente foi possível condensar esta história num livro de duzentas a trezentas páginas submetendo-nos a uma disciplina estrita, esboçando o desenvolvimento de algumas ideias principais e minimizando as referências a outros desenvolvimentos. Os detalhes bibliográficos tiveram de ser restringidos a um esboço; muitos autores relativamente importantes —Roberval, Lambert, Schwarz— não foram referidos. A maior restrição talvez seja a insuficiente referência à atmosfera sociológica e cultural na qual as matemáticas de um determinado período amadureceram— ou foram sufocadas. A matemática tem sido influenciada pela agricultura, o comércio e a manufactura, pela guerra e a engenharia, pela filosofia e pela física e a astronomia. A influência da hidrodinâmica na teoria das funções, do kantismo e da agrimensura na geometria, do electromagnetismo nas equações diferenciais, do cartesianismo na mecânica e da escolástica no cálculo podia apenas ser indicada em algumas frases — ou talvez em poucas palavras —, mas uma compreensão do rumo e do conteúdo das matemáticas só pode ser atingida se todos estes factores determinantes forem tomados em consideração. Por vezes, uma referência bibliográfica substitui uma

análise histórica. A nossa história termina por volta de 1945, porque sentimos que a matemática das últimas décadas do século XX tem muitos aspectos a que é impossível, pelo menos a este autor, fazer justiça, mesmo em relação às tendências principais.

Esperamos que, apesar destas restrições, tenhamos sido capazes de descrever correctamente as principais tendências do desenvolvimento das matemáticas, através das épocas e do ambiente social e cultural em que ocorreram. A selecção de material não foi, claro, baseada exclusivamente em factores objectivos, mas foi influenciada pelas simpatias e antipatias do autor, pelo seu conhecimento e pela sua ignorância. No que respeita à sua ignorância, nem sempre foi possível consultar todas as fontes em primeira mão; demasiadas vezes tiveram de ser usadas fontes em segunda, ou mesmo em terceira mão. Por isso é um bom conselho, no que diz respeito não só a este livro, mas também a todas as histórias deste género, conferir as afirmações tanto quanto possível pelas fontes originais. Este é um bom princípio por várias razões. O nosso conhecimento de autores como Euclides, Diofanto, Descartes, Laplace, Gauss ou Riemann não devia ser obtido exclusivamente através de citações ou de histórias que descrevem os seus trabalhos. Existe o mesmo poder vivificante tanto num Euclides ou num Gauss como num original de Shakespeare e há passagens em Arquimedes, Fermat ou Jacobi que são tão belas como se de Horácio e Emerson se tratasse.

Entre os princípios que nortearam o autor na apresentação do seu material destacam-se os seguintes:

1. Salientar a continuidade e a afinidade das civilizações orientais, em vez das divisões mecânicas entre as culturas egípcia, babilónica, chinesa, indiana e árabe;
2. Distinguir entre facto estabelecido, hipótese e tradição, especialmente na matemática grega;
3. Relacionar as duas tendências da matemática do Renascimento, a aritmético-algébrica e a «fluxional», respectivamente, com os interesses comerciais e da engenharia neste período;

4. Basear a exposição da matemática do século XIX em personalidades e escolas em vez de assuntos. (A história de Felix Klein poderia ser aqui utilizada como um primeiro guia. Pode ser encontrada uma exposição por assuntos nos livros de Cajori e de Bell ou, com mais detalhes técnicos, na *Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften* [24 vols., Leipzig, 1898-1935] e no *Repertorium der höheren Mathematik* [5 vols., Leipzig, 1910-29], de Pascal.) Para o século XX foi utilizado um método mais variado.

2

Segue-se uma lista de algumas obras mais importantes de história da matemática em geral. Esta lista pode ser considerada um suplemento à obra de G. Sarton *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, 1936), que não só contém uma introdução interessante ao nosso tema, mas também fornece informação bibliográfica muito completa. Consultar ainda K. O. May, *Bibliography and Research Material of the History of Mathematics* (Toronto, 1973; 2.ª ed., 1978), 827 páginas de informação biobibliográfica.

Obras em inglês:

Archibald, R. C., *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª ed. rev. e aumentada, Math. Assoc. of America, 1949. (Uma excelente síntese de 114 páginas com muitas referências bibliográficas.)

Cajori, F. A., *History of Mathematics*, 2.ª ed., Nova Iorque, 1938. (Um texto clássico de 514 páginas.), 1.ª ed., mais pequena, 1919; reedição de Chelsea House, Nova Iorque, 1980.

Smith, D. E., *History of Mathematics*, 2 vols., Boston, 1923; reedição de Dover, 2 vols. 1958. (Limita-se essencialmente às matemáticas elementares, mas tem referências aos matemáticos mais importantes. Muitas ilustrações.)

Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Pelican Books, 1953. Também: E. T. Bell, The Development of Mathematics, 2.ª ed., Nova Iorque e Londres, 1945. (Estes livros contêm abundante material sobre os matemáticos e as suas obras. No segundo livro é realçada a matemática moderna.)

Scott, J. F., *A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century*, Londres, 1958.

Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Nova Iorque, 1953; 4.ª ed. aumentada, 1976. (Excelente para utilizar no ensino.)

Turnbull, H. W., *The Great Mathematicians*, Londres, 1929; nova edição, Nova Iorque, 1961. (Também em Newman, J. R., *The World of Mathematics*, vol. I, Nova Iorque, 1956.)

Hofmann, J. E., *The History of Mathematics*, Nova Iorque, 1957. (Traduzido do original alemão, vol. 1; ver referência mais à frente. Os vols. 2 e 3 da edição alemã são traduzidos como *Classical Mathematics*, Nova Iorque, 1959.)

Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, Nova Iorque, 1968. (Tem XV + 717 páginas e é talvez o melhor livro em inglês para uso escolar. Encontra-se uma bibliografia da obra de Boyer em M. J. Crowe, *HM*, vol. 3, 1976, pp. 397-401.)

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nova Iorque, 1972. (Este livro tem XVII + 1238 páginas, com capítulos sobre a história de vários assuntos, tais como equações diferenciais ordinárias e parciais, álgebra abstracta, fundamentos, etc.)

Obras sobre matemáticas elementares principalmente:

Sanford, V., *A Short History of Mathematics*, Londres, 1930.

Cajori, F. A., *A History of Elementary Mathematics*, Nova Iorque, 1896, 1917.

Ball, W. W. Rouse, *A Short Account of the History of Mathematics*, 6.ª ed., Londres, 1915; reedição de Dover, 1960. (Um texto muito antigo, de leitura agradável, mas desactualizado; não vai além da primeira metade do século XIX.)

Bunt, L. N. H., Jones, P. S., e Bedient, J. D., *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Englewood Cliffs, N. J., 1976. (Temas seleccionados, discussões e exercícios escolares.)

Historical Topics for the Mathematical Classroom, 31st Yearbook, Nat. Council Teachers of Mathematics, Washington, D. C., 1969. (Monografias sobre vários assuntos, cada uma delas escrita por um autor particular.)

A obra clássica sobre história das matemáticas até 1800 ainda é:

Cantor, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 4 vols., Leipzig, 1880-1908. (Este enorme trabalho, cujo quarto volume foi escrito por um grupo de especialistas sob a direcção de Cantor, cobre toda a história da

matemática até 1779. Está ultrapassada em muitos pontos, mas ainda é um bom livro para uma primeira orientação. Correcções de G. Ernestrõm *et al.* nos volumes de *Bibliotheca mathematica.*)

Outros livros alemães:

Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, 1.ª ed., Copenhaga, 1896; ed. francesa, Paris, 1902; 2.ª ed., revista por O. Neugebauer, Copenhaga, 1949.

—, *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, Leipzig, 1903.

Gunther, S., e Wieleitner, H., *Geschichte der Mathematik*, 2 vols., Leipzig: vol. I (por Günther), 1908; vol. II, duas partes (por Wieleitner), 1911-21. Ed. por Wieleitner, Berlim, 1939.

Tropfke, J., *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 2.ª ed., 7 vols., Leipzig, 1921-24. (Vols. I-IV da 3.ª ed., 1930-40; vol. I da 4.ª ed., revista, Berlim, 1980.)

Die Kultur der Gegenwart, 3 vols., Leipzig e Berlim, 1912. (Contém: Zeuthen, H. G., *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter;* Voss, A., *Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur;* Timerding, H. E., *Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung.*)

Becker, O., e Hofmann, J. E., *Geschichte der Mathematik*, Bona, 1951.

Hofmann, J. E., *Geschichte der Mathematik*, 3 vols., Berlim, 1953-57. Tradução inglesa, Nova Iorque, 1957. (Vol. I, 2.ª ed., Berlim, 1963.)

Os livros que seguem apresentam extensas biobibliografias:

Becker, O., *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Friburgo e Munique, 1954; 2.ª ed., Friburgo, 1964.

Kowalewski, G., *Grosse Mathematiker*, Munique e Berlim, 1938.

Meschkowski, H., *Problemgeschichte der Mathematik*, 2 vols. Mannheim, 1979, 1980.

—, *Ways of Thought of Great Mathematicians*, São Francisco, 1964.

[Wussing, H., e Arnold, W., eds.] *Biographien bedeutender Mathematiker*, 2.ª ed., Berlim, 1978. (Quarenta e uma biografias de Pitágoras a Emmy Noether.)

Wussing, H., *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlim, 1979. (O livro vai até época recente, contendo temas seleccionados, como, por exemplo, computadores; forte ênfase no ambiente social.)

O livro mais antigo sobre a história da matemática (exceptuando Proclo), que é mais do que um catálogo, é:

Montucla, J.-E., *Histoire des mathématiques.* 4 vols., Paris, 1799-1802. Nova reimpressão, 1960. (Trata também das matemáticas aplicadas. Publicado primeiramente em 1758, 2 vols., mas ainda é um bom livro.)

Também em francês:

D'Ocagne, M., *Histoire abrégée des sciences mathématiques, ouvrage recueilli et achevé par R. Dugas*, Paris, 1952. (Apresenta resumos biográficos.)
Dedron, J., e Itard, J., *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, 1959. (Muitas ilustrações.)
Bourbaki, N., *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, 1960. (Uma compilação de notas históricas da série *Eléments de mathématiques*, Paris, 1939, até ao presente.)
[Dieudonné, J., ed.] *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, 2 vols., Paris, 1970. (Uma compilação de ensaios por vários autores.)

Ver também, mais à frente, M. Daumas e R. Taton.

Collette, J. P., *Histoire des mathématiques*, Montréal, 1973. (Vai até ao início do século XVII.)

Em italiano:

Loria, G., *Storia delle mathematique*, 3 vols., Turim, 1929-33.
Maracchia, S., *La matematica come sistema ipotetico-deduttivo, profile storico*, Florença, 1975.
Frajese, A., *Attraverso la storia della matematica*, Florença, 1973.

Em russo:

Rybnikov, K. A., *Istoriya matematiki*, 2 vols., Moscovo, 1960-63.
[Juškevič, A. P., ed.] *Istoriya matematiki*, 3 vols., Moscovo, 1970-72. (Uma compilação de ensaios por vários autores.)

Também existem antologias de trabalhos matemáticos:

Midonick, H., *A Treasury of Mathematics*, Nova Iorque, 1965.
Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics*, Londres, 1929.
Wieleitner, H., *Mathematische Quellenbücher*, 4 vols., Berlim, 1927-29.
Speiser, A., *Klassische Stücke der Mathematik*, Zurique e Leipzig, 1925.

Newman, J. R., *The World of Mathematics*, 4 vols., Nova Iorque, 1956. (Uma antologia de ensaios de matemática por matemáticos.)
Struik, D. J., *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, Cambridge, Mass., 1969.

Na mesma série dos «Source Book» ver também os livros editados por J. van Heijenoort e G. Birkhoff que tratam dos séculos XIX e XX.
Também útil:

Callandrier, E., *Célèbres problèmes mathématiques*, Paris, 1949.

Também existem histórias específicas, das quais referimos:

Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers*, 3 vols., Washington, 1919-27.
Muir, T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, 4 vols., Londres, 1906-23. Suplemento, *Contributions to the History of Determinants 1900-20*, Londres, 1930.
von Braunmühl, A., *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 2 vols., Leipzig, 1900-03.
Dantzig, T., *Number: The Language of Science*, 3.ª ed., Nova Iorque, 1943; também Londres, 1940.
Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods*, Oxford, 1940.
Loria, G., *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 4.ª ed., Turim, 1931.
—, *Storia della geometria descrittiva dalle origini fino ai giorni nostri*, Milão, 1921.
—, *Curve piani speciali algebriche e trascendenti*, 2 vols., Milão, 1930. Ed. alemã, anteriormente publicada, 2 vols., Leipzig, 1910-11.
Cajori, F. A., *A History of Mathematical Notations*, 2 vols., Chicago, 1928-29.
Karpinski, L. C., *The History of Arithmetic*, Chicago, 1925. (Bibliografia do trabalho de Karpinski por P. S. Jones: *HM*, vol. 3, 1976, pp. 193-202.)
Walter, H. M., *Studies in the History of Statistical Methods*, Baltimore, 1929.
Reiff, R., *Geschichte der unendlichen Reihen*, Tubinga, 1889.
Todhunter, I., *History of the Progress of the Calculus of Variations During the Nineteenth Century*, Cambridge, 1861.
—, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace*, Cambridge, 1865.
—, *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to That of Laplace*, 2 vols., Londres, 1873.

Coolidge, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford, 1949.
Archibald, R. C., *Mathematical Table Makers*, Nova Iorque, 1948.
Dugas, R., *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, 1950. Ver também *Mathematical Reviews*, vol. 14, 1953, pp. 341-343.
Boyer, C., *History of Analytic Geometry*, Nova Iorque, 1950.
—, *History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nova Iorque, 1949; reedição de Dover, 1959.
Beth, E. W., *Geschiedenis der logica*, Hain, 1944.
Markuschewitz (Markuševic), A. I., *Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen*, Berlim, 1955 (traduzido do russo).
Goldstine, H. H., *A History of the Calculus of Variations from the 17th Through the 19th Century*, Nova Iorque, etc., 1980.
Dobrovolskiĭ, V. A., *Essays on the Development of the Analytical Theory of Differential Equations* (em russo), Kiev, anterior a 1976. (Ver *HM*, vol. 3, 1976, p. 221-223.)
Caruccio, E., *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Turim, 1958. Tradução inglesa: Londres, 1964.
Styazhkin, N. I., *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*, traduzido do russo, Cambridge, Mass., 1969. (Ver *HM*, vol. 2, 1975, pp. 361-365.)
Tietze, H., *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit*, Munique, 1949; 2.ª ed., Zurique, 1959. Tradução inglesa: Nova Iorque, 1965.
Dieudonné, J., *Cours de géométrie analytique*, Paris, 1974. (O primeiro volume é histórico.)
Lebesgue, H., *Notices d'histoire des mathématiques*, Genebra, 1959. (Notas biográficas de A. T. Vandermonde, C. Jordan e outros.)
Struik, D. J., *The Historiography of Mathematics from Proklos to Cantor*, *NTM* (Leipzig), vol. 17, 1980, pp. 1-22.
Maistrov, L. E., *Probability Theory, a Historical Sketch*, Nova Iorque e Londres, 1974. (Do russo, 1967).
[Grattan-Guinness, 1.ª ed.] *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*, Londres, 1980. (Uma compilação de ensaios de vários autores.)
Biggs, N. C., *Graph Theory 1736-1936*, Oxford, 1976.
Glaser, A., *History of Binary and Other Non-Decimal Numeration*, Southampton, Pa., 1971.

A história da matemática também é discutida nos livros de história da ciência em geral. O livro clássico é:

Sarton, G., *Introduction to the History of Science*, 3 vols., Washington e Baltimore, 1927-48. (Vai até ao século XIV e pode ser complementado

com o ensaio de Sarton *The Study of the History of Science, with an Introductory Bibliography*, Cambridge, 1936. Ver também o livro de Sarton referido atrás e, ainda do mesmo autor, a *History of Science: Ancient Science through the Golden Age of Greece*, Cambridge, Mass., 1952.)

Também:

[Daumas, M., ed.] *Histoire de la science*, Encyclopédie de la Pléiade, Paris, 1957.

[Taton, R., ed.] *Histoire générale des sciences*. vols. I, II, III_1, III_2, Paris, 1957-64.

Boas obras para uso escolar são:

Sedgwick. W. T., e Tyler, H. W., *A Short History of Science*, 3.ª ed., Nova Iorque, 1948.

Singer, C. A., *A Short History of Science to the Nineteenth Century*, Oxford, 1941, 1946.

A influência cultural da matemática e a influência da cultura na matemática são os temas das seguintes obras:

Kline, M., *Mathematics in Western Culture*, Nova Iorque, 1953.

Bochner, S., *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton, N. J., 1966.

Wilder, R. L., *Evolution of Mathematical Concepts*, Nova Iorque, 1968. Ver também *HM*, vol. 1, 1979, pp. 29-46; vol. 6, 1979, pp. 57-62.

—, *Mathematics as a Cultural System*, Oxford, etc., 1981.

Na fronteira entre a filosofia e a história da matemática:

[Worrall, J., e Zahar, B., eds.] *Imre Lakatos. Proofs and Refutation. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, 1976.

Sobre a descoberta matemática:

Hadamard, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, N. J., 1945, 1949 (do francês, 1939); edição de Dover, 1954.

Também útil:

Miller, G. A., «A First Lesson in the History of Mathematics», «A Second Lesson», etc., uma série de dez artigos in *Nat. Math. Mag.*, vols. 13-19 (1939-45).

[Poggendorff, J. C., ed.] *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*. Primeiramente publicado em 2 volumes, 1863. Foi continuado e aumentado ao longo dos anos. Por volta de 1974 tinha 18 volumes; ver *Supplement-Band* a *Band VIIa* (Berlim, 1971).
Naas, J., e Schmidt, H. L., *Mathematisches Wörterbuch*, 2 vols., Berlim e Leipzig, 1961.
Meschkowski, H., *Mathematiker Lexikon*, 3.ª Auflage, Zurique, etc., 1980. (1.ª ed., 1968. Contém pequenas biografias de matemáticos, uma bibliografia de obras escolhidas e uma bibliografia das biografias de matemáticos.)

O leitor poderá entreter-se com:

Struik, D. J., «Why Study History of Mathematics?», in *UMAP Journal*, vol. 1, 1980, pp. 3-28.

Os periódicos seguintes tratam da história da matemática (ou da ciência em geral):

Archiv für die Geschichte der Mathematik, 1909-31.
Bibliotheca mathematica, Ser. 1-3, 1884-1913.
Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1931-38
Scripta mathematica, 1932-presente.
Isis, 1913-presente.
Revue d'histoire des sciences, 1947-presente.
Archives internationales d'histoire des sciences, 1947-presente (antigo *Archeion*).
Annals of Science, 1936-presente.
Scientia, 1907-presente.
Centaurus, 1950-presente.
Istoriko-matematičeskie Issledovaniya, 1948-presente.
Boethius, 1962-presente.
Physis, 1959-presente.
NTM (Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin), 1960-presente.
AHES (Archive for History of Exact Sciences), 1960-presente.
Biometrika, 1901-presente.
HM (Historia Mathematica), 1974-presente.
Indian Journal of History of Science.
Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche, 1981-presente.
Journal of the History of Arabic Science.
Annals of the History of Computers, 1979-presente.

A *AHES* e a *HM* dedicam-se exclusivamente à matemática. A *HM* tem a bibliografia actualizada, tal como acontece com a *Isis* em relação a toda a história da ciência. Ver também *Mathematical Reviews*, 1940-presente; tem uma secção de história e edições em russo e alemão.

As biografias dos matemáticos mais importantes (falecidos) encontram-se nos 15 volumes do *Dictionary of Scientific Biography (DBS)*, Nova Iorque, 1970-80. (O vol. 15 é o índice).

O *World Directory of Historians of Mathematics*, 2.ª ed., 1981, foi preparado pelo Institute for the History and Philosophy of Science and Technology da Universidade de Toronto, Canadá. Foi preparada uma edição posterior pelo Prof. L. Nový, da Academia das Ciências Checoslovaca, em Praga.

CAPÍTULO I

As origens

1

As nossas primeiras concepções de número e forma datam de tempos tão remotos como os do começo da idade da pedra, o paleolítico. Durante as centenas de milhares de anos, ou mais, deste período, os homens viviam em cavernas, em condições pouco diferentes das dos animais, e as suas principais energias eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Eles faziam instrumentos para caçar e pescar, desenvolviam a linguagem para comunicarem uns com os outros e, nos últimos tempos do paleolítico, enriqueceram as suas habitações com certas formas de arte criativa, estatuetas e pinturas. As pinturas em cavernas da França e da Espanha (com mais de 15 000 anos) deviam ter algum significado ritual; elas revelam, sem dúvida, uma notável compreensão da forma; matematicamente falando, revelam uma compreensão da descrição bidimensional dos objectos no espaço.

Poucos progressos se fizeram no conhecimento de valores numéricos e de relações espaciais até se dar a transição da mera *recolha* de alimentos para a sua *produção*, da caça e da pesca para a agricultura. Com esta transformação fundamental —uma revolução na qual a atitude do homem perante a natureza deixou

de ser passiva, para se tornar activa— inicia-se um novo período da idade da pedra, o neolítico.

Este grande acontecimento da história da humanidade ocorreu provavelmente há 10 000 anos, depois de as camadas de gelo que cobriam a Europa e a Ásia se terem fundido e dado lugar às florestas e aos desertos. Os nómadas, que vagueavam à procura de alimentos, foram desaparecendo a pouco e pouco. Os caçadores e pescadores foram em grande parte substituídos por agricultores. Tais agricultores, que se fixavam num local enquanto o solo se mantivesse fértil, começaram a construir habitações mais permanentes; surgiram assim povoações, como protecção contra os rigores do clima e os predadores inimigos. Muitas destas povoações neolíticas foram escavadas. Os restos encontrados mostram como se desenvolveram gradualmente certos ofícios elementares, tais como a cerâmica, a carpintaria e a tecelagem. Existiam celeiros onde os habitantes guardavam os excedentes para o Inverno e períodos mais difíceis. Coziam o pão, fermentavam a cerveja e, nos últimos tempos do neolítico, preparavam e fundiam o cobre e o bronze. Ocorreram algumas invenções notáveis: a roda de oleiro e a roda de carro; aperfeiçoaram-se os barcos e os abrigos. Estas importantes invenções deram-se somente em certas áreas e nem sempre atingiram outras localidades. Os Índios americanos, por exemplo, pouco sabiam da técnica para usar a roda no transporte até à chegada dos Europeus.

Apesar de tudo, no neolítico, quando comparado com o paleolítico, o ritmo de aperfeiçoamento técnico foi muito acelerado.

Durante o neolítico existia uma actividade comercial considerável entre as diversas povoações, actividade que se desenvolveu de tal modo que foram estabelecidas ligações entre localidades afastadas algumas centenas de quilómetros. A descoberta das técnicas de fundição e de manufactura, primeiro do cobre, depois de utensílios e armas de bronze, estimulou fortemente esta actividade comercial. Isto também promoveu a formação

de linguagens. As palavras destas linguagens exprimiam coisas muito concretas e muito poucas abstracções, mas havia já lugar para alguns termos numéricos simples e algumas relações de forma. Muitas tribos australianas, americanas e africanas encontravam-se neste estado na altura dos seus primeiros contactos com europeus; algumas delas vivem ainda nestas condições, o que torna possível estudar os seus hábitos e formas de expressão e compreendê-las até certo ponto, se nos libertarmos de noções preconcebidas.

2

Os termos numéricos —que, como disse Adam Smith, exprimem algumas das «ideias mais abstractas que o pensamento humano é capaz de formar»— só lentamente começaram a ser usados. As suas primeiras ocorrências foram mais qualitativas do que quantitativas, marcando somente a distinção entre um, dois e muitos. Na velha língua das ilhas Fidji, «dez barcos» diz-se *bola*, «dez cocos» diz-se *koro* e «um milhar de cocos» diz-se *saloro*. A origem qualitativa das concepções numéricas pode ser ainda detectada em certas palavras compostas que existem em algumas línguas, como o grego e o céltico. Quando o conceito de número se foi alargando, os números maiores foram formados primeiro por adição: 3 adicionando 2 e 1, 4 adicionando 2 e 2, 5 adicionando 2 e 3.

Eis um exemplo proveniente de algumas populações australianas:

Murray River: 1 = enea, 2 = petcheval, 3 = petcheval enea, 4 = petcheval petcheval.

Kamilaroi: 1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan bulan, 5 = bulan guliba, 6 = guliba guliba[1].

---

[1] L. Conant, *The Number Concept*, Nova Iorque, 1896, pp. 106-107, com muitos outros exemplos análogos.

O desenvolvimento das actividades comerciais estimulou esta cristalização do conceito de número. Os números foram ordenados e agrupados em unidades cada vez maiores, geralmente pelo uso dos dedos de uma das mãos ou das duas, um processo natural no comércio. Isto conduziu à numeração de base 5 e mais tarde à de base 10, completada com a adição e, por vezes, a subtracção; assim, 12 era considerado como $10+2$, 9 como $10-1$. Por vezes escolhia-se 20 para base, o número total de dedos dos pés e das mãos. Dos 307 sistemas de numeração dos povos primitivos da América investigados por W. C. Eels, 146 são decimais, 106 de base 5, 15, 20 ou 25[2]. O sistema de base 20, na sua forma mais característica, foi usado pelos Maias do México e pelos Celtas na Europa.

Os registos numéricos eram conservados por meio de agrupamentos, entalhes num pau, nós numa corda, ou dispondo seixos ou conchas em grupos de 5 — processos muito parecidos ao dos antigos estalajadeiros, que usavam (nas suas contas) paus entalhados. Deste método à utilização de símbolos especiais para 5, 10, 20, etc., foi apenas um passo, e vamos encontrar exactamente tais símbolos no início da história escrita, no chamado despertar da civilização.

Um dos mais antigos exemplos do uso de um «pau» entalhado data do paleolítico e foi encontrado em 1937 em Věstonice (Morávia). É o osso de um pequeno lobo com o comprimento de 7 polegadas, gravado com 55 entalhes marcados profundamente, dos quais os primeiros 25 estão dispostos em grupos de 5. São seguidos por um entalhe duas vezes mais comprido, que termina a série; partindo do entalhe seguinte, também duas vezes mais longo, prossegue uma nova série perfazendo 30 entalhes[3]. Foram encontrados mais destes paus entalhados.

---

[2] W. C. Eels, «Number Systems of North American Indians», in *Amer. Math. Monthly*, vol. 20, 1913, pp. 263-272 e 293-299, ver especialmente p. 293.

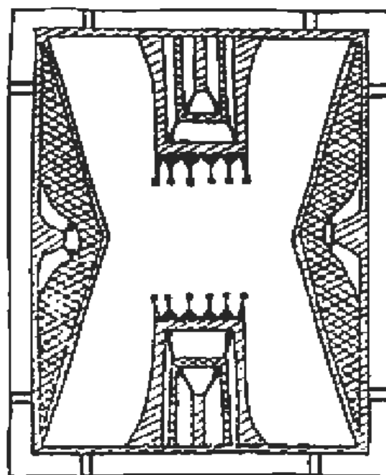
[3] *Isis*, vol. 28, 1938, pp. 462-463 (do *Illustrated London News* de 2 de Outubro de 1937).

Torna-se claro que a velha frase de Jakob Grimm, muitas vezes repetida, «a contagem começou pelos dedos» é incorrecta. Contar pelos dedos, ou seja, contar 5 a 5 e 10 a 10, surgiu apenas numa determinada fase do desenvolvimento social. Quando se alcançou essa fase, os números passaram a exprimir-se numa base, com a ajuda da qual podem ser formados números grandes; foi desta maneira que surgiu uma aritmética de tipo primitivo. O número 14 exprimia-se por 10 + 4, ou algumas vezes por 15 — 1. A multiplicação começou quando 20 se exprimiu, não como 10 + 10, mas como 2 × 10. Tais operações diádicas foram usadas durante milhares de anos como uma espécie de meio caminho entre a adição e a multiplicação, especialmente no Egipto e na civilização pré-ariana de Mohenjo-Daro, no Indo. A divisão começou quando 10 se exprimiu como «metade de um corpo», embora a formação consciente de fracções permanecesse bastante rara. Nas tribos norte-americanas, por exemplo, são conhecidos poucos casos de formação de fracções e em quase todos somente $^1/_2$, embora algumas vezes surja $^1/_3$ e $^1/_4$[4]. Um fenómeno curioso era o gosto pelos números grandes, que pode ser explicado pela tendência que os homens tinham para exagerar o número de inimigos mortos; aparecem reminiscências desta tendência na Bíblia e em textos sagrados e noutros menos sagrados.

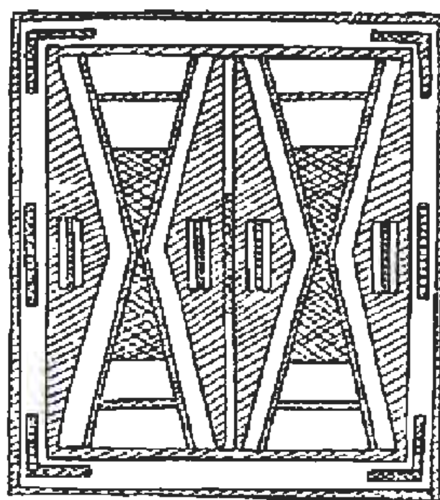
3

Tornou-se também necessário medir o comprimento ou o volume de certos objectos. Os padrões eram grosseiros e muitas vezes provinham de partes do corpo humano, o que deu ori-

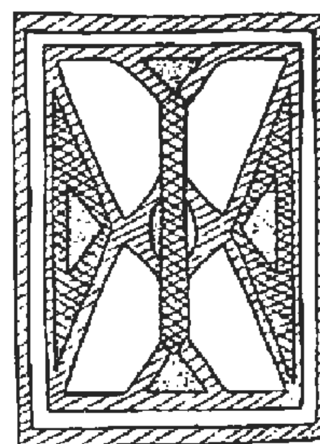
[4] G. A. Miller observou que as palavras com o significado de *um meio*, em várias línguas, *one-half, semis, moitié*, não têm ligação directa com as palavras *two, duo, deux* (contrariamente a *um terço, um quarto*, etc), o que parece mostrar que a concepção de ½ é originada independentemente da de inteiro (*Nat. Math. Magazine*, vol. 13, 1939, p. 272).



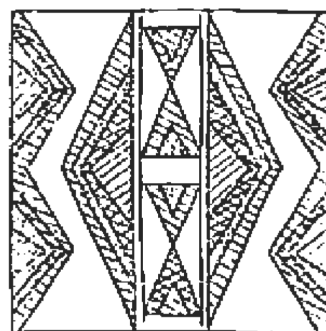
49 CHEYENNE



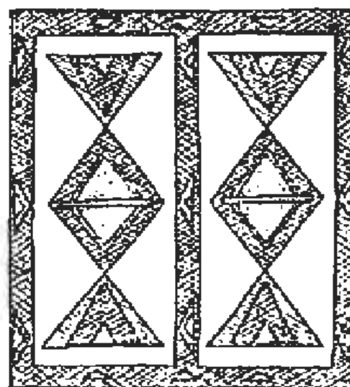
50* CHEYENNE



51* CHEYENNE

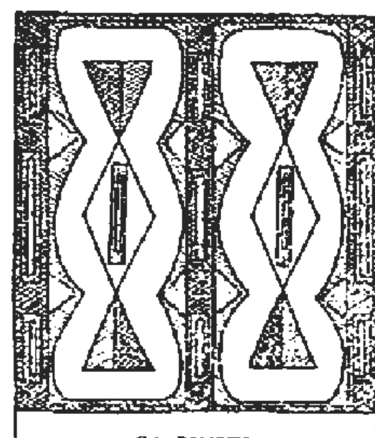


52 NO. CHEYENNE

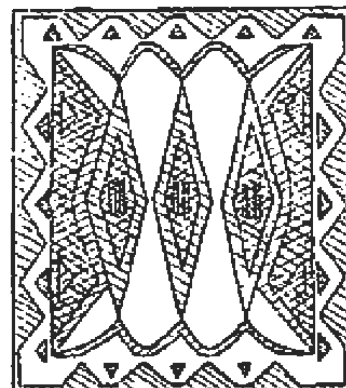




53 OTO



54 DAKOTA



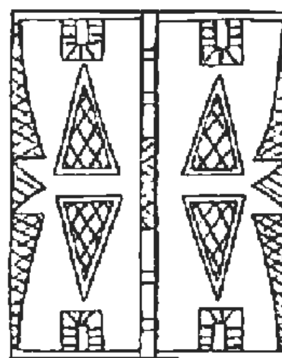
55 DAKOTA



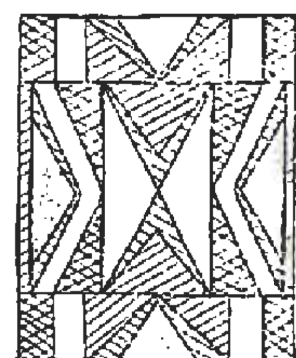
56 DAKOTA



57 DAKOTA



58 DAKOTA

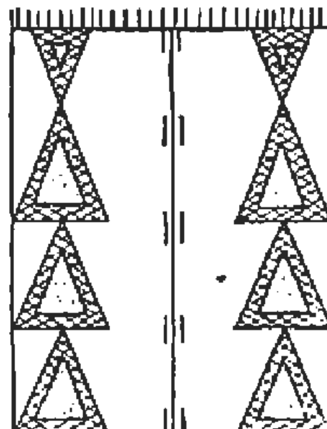


59 DAKOTA

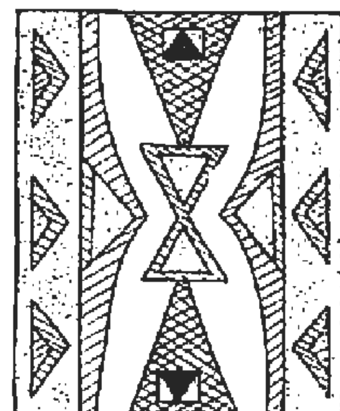


60 DAKOTA





61 DAKOTA



62 DAKOTA

PADRÕES GEOMÉTRICOS DESENVOLVIDOS PELOS ÍNDIOS AMERICANOS

(Tirado de Speer; ver «Bibliografia» adiante)

gem a unidades de medida como o dedo, o pé e a mão. Os nomes de «vara», «braça» e «cúbito» recordam também este costume. Quando se construíam casas, como, por exemplo, as dos agricultores indianos ou as casas de madeira dos habitantes da Europa central, estabeleciam-se regras para a construção ser feita segundo linhas rectas e ângulos rectos. A palavra «recta» relaciona-se com «esticar»[5], indicando operações com uma corda[6]; a palavra «linha» relaciona-se com «linho», o que mostra uma certa ligação entre a tecelagem e as origens da geometria[7]. Isto foi um dos modos pelos quais o interesse na medição se desenvolveu.

O homem do neolítico também revelou um agudo sentido para os padrões geométricos. A cozedura e a pintura da cerâmica, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos e têxteis e, mais tarde, o fabrico de metais conduziram à noção de plano e a relações espaciais. As formas da dança devem ter desempenhado um papel importante. A ornamentação neolítica refulgia com a manifestação da congruência, da simetria e da semelhança. Nestas formas poderão ocorrer relações numéricas, como em certos padrões pré-históricos, que representam números triangulares; outras revelam números «sagrados».

As figs. 1-4 constituem exemplos de padrões geométricos interessantes utilizados na cerâmica, na tecelagem e na cestaria. O desenho da fig. 1 encontra-se na cerâmica neolítica da Bósnia e em objectos de arte do período Ur da Mesopotâmia[8].

---

[5] As palavras «recta» e «esticar» traduzem-se em inglês por *straight* e *stretch*. *(N. do T.)*

[6] O nome «esticadores de corda» (grego *harpedonaptai*; árabe *massah;* assírio *masihānu*) está ligado em muitos países aos homens que se ocupam de medições ou levantamentos topográficos (ver S. Gandz, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, vol. I, 1931, pp. 255-277).

[7] Sobre a derivação dos nomes de números ver o livro de K. Menninger (ver «Bibliografia», mais adiante).

[8] W. Lietzmann, «Geometrie und Praehistorie», in *Isis*, vol. 20, 1933, pp. 436-439.

O motivo da fig. 2 existe na cerâmica egípcia do período pré-dinástico (*c.* 4000-3500 a. C.)[9]. A fig. 3 mostra modelos utilizados pelos habitantes das casas de madeira perto de Ljubljana (Jugoslávia) no período Hallstatt (Europa central, *c.* 1000-500 a. C.)[10]. Os desenhos da fig. 4, que apresentam triângulos inscritos em rectângulos e em círculos, provêm de urnas em sepulcros próximo de Sopron, na Hungria. Eles mostram tentativas de formação de números triangulares, que desempenharam importante papel nas matemáticas pitagóricas de um período posterior[11].



Fig. 1.

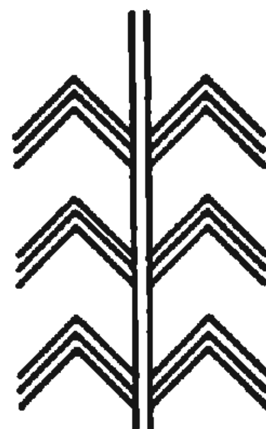


Fig. 2.

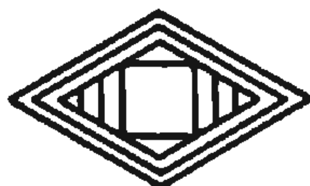
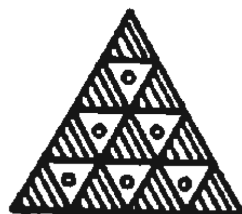
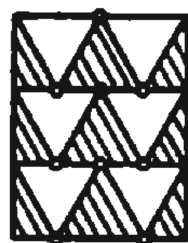


Fig. 3.





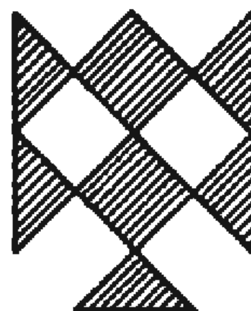


Fig. 4.

[9] D. E. Smith, *History of Mathematics*, Boston, 1923, vol. I, p. 15 (reedição de Dover, 2 vols., 1958).

[10] M. Hoernes, *Urgeschichte der bildenden Kunst in Europa*, Viena, 1915.

[11] Ver também F. Boas, *General Anthropology*, Nova Iorque, 1938, p. 273.

Padrões deste tipo ficaram populares através da história. Podem-se encontrar belos exemplares nos vasos *dypilon* do período minóico e dos primeiros períodos da Grécia; mais tarde, nos mosaicos bizantinos e árabes e na tapeçaria persa e chinesa. Os modelos mais antigos devem ter tido um significado religioso ou mágico, mas, gradualmente, o seu sentido estético tornou-se dominante. Nas religiões da idade da pedra podem discernir-se as primeiras tentativas de adaptação às forças da natureza, à estrutura social e à experiência individual. A magia penetrava profundamente nas cerimónias religiosas e incorporava-se também nas concepções de número e forma, assim como na escultura, na música e no desenho. Existiam números mágicos (tais como 3, 4, 7) e figuras mágicas (tais como o pentalfa e a suástica). Alguns autores consideram que este aspecto da matemática foi um factor determinante do seu desenvolvimento[12], mas, embora as raízes sociais da matemática se tivessem tornado obscuras nos tempos modernos, elas são evidentes nos tempos primitivos da história da humanidade.

Mesmo nos povos com uma estrutura social bem distante da nossa civilização técnica encontramos registos do tempo e, relacionados com eles, conhecimentos dos movimentos do Sol, da Lua e das estrelas. Este conhecimento atingiu pela primeira vez um carácter científico com o desenvolvimento da agricultura e do comércio. O uso do calendário lunar tem origem muito antiga na história da humanidade e está ligado às variações da vegetação com as fases da Lua. Os povos primitivos dedicaram também a sua atenção aos solstícios e ao nascimento das Plêiades ao amanhecer. Os povos com mais antigos registos atribuíam conhecimentos astronómicos aos períodos pré-históricos mais remotos. Outros povos primitivos usaram as constelações para se guiarem na navegação. Desta astronomia resultaram alguns

---

[12] W. J. McGee, *Primitive Numbers*, Nineteenth Annual Report, Bureau Amer. Ethnology 1897-98 (1900), pp. 825-851. Ver especialmente os artigos de A. Seidenberg, citados adiante.

conhecimentos sobre as propriedades da esfera, das direcções angulares, dos círculos e mesmo de figuras mais complicadas.

Em anos recentes, uma atenção considerável tem sido dada a possíveis significados relacionados com a astronomia e o calendário dos monumentos megalíticos; é o caso do monumento de Stonehenge, na Inglaterra, que remonta ao ano 2000 a. C.[13] Se tiverem esse significado, surge a questão de saber se estes conhecimentos de astronomia e, de certo modo, de matemática foram transmitidos de algum centro, talvez da Mesopotâmia (difusionismo), ou tiveram uma origem autóctone (opinião que tem sido mais apoiada). As civilizações da América parecem também ter-se desenvolvido independentemente das civilizações da Eurásia e da África, ou, em todo o caso, com poucas influências dessas civilizações.

5

Os exemplos que acabámos de apresentar sobre as origens da matemática mostram que o desenvolvimento histórico de uma ciência não passa necessariamente pelas mesmas fases que actualmente consideramos no nosso ensino. Algumas das mais antigas formas geométricas conhecidas pelos homens, tais como laços e outros padrões, só recentemente foram tratadas cientificamente. Por outro lado, alguns dos ramos elementares das matemáticas, como a representação gráfica ou a estatística elementar, datam, em comparação, de tempos mais recentes. Como A. Speiser observou com certa aspereza (e algum exagero):

> A tendência para o tédio, que parece ser inerente às matemáticas elementares, pode ser explicada pela sua origem tardia, pois o matemático criativo preferiria ocupar-se dos problemas interessantes e belos[14].

---

[13] Para uma discussão geral deste assunto ver o livro de D. C. Haggie citado adiante.

[14] É um comentário espirituoso, mas as «matemáticas elementares», ensinadas por um bom professor, podem não ser nada aborrecidas. E não pertencem às «matemáticas elementares» os poliedros regulares e a secção de ouro, que entusiasmaram tanta gente desde Platão até aos nossos dias?

Talvez seja uma boa ocasião para mencionar as matemáticas de três antigas civilizações, interessantes em si próprias, mas com pouca ou nenhuma influência no desenvolvimento das matemáticas: os Minóico-Micénicos, os Maias e os Incas. A sua ciência não é a das «origens», pertence de preferência ao grupo tratado no capítulo seguinte, «O Oriente Antigo».

Símbolos matemáticos usados na administração foram encontrados nas ruínas da civilização minóico-micénica de Creta e do continente grego. Pertencem à chamada escrita linear A e B, do período entre 1800 e 1200 a. C. Os números são representados, tal como no Egipto (mas com símbolos diferentes), por símbolos especiais para 1, 10, 100 e 1000 e de uma forma aditiva. Também existem símbolos para fracções simples, nem todas fracções unitárias. Visto que os escribas não coziam as placas de barro em que escreviam, só se preservaram as que foram cozidas nos momentos do colapso final das suas cidades; assim, não estamos suficientemente informados da extensão dos conhecimentos matemáticos desta civilização; podem ter sido comparáveis aos do Egipto. De qualquer modo, sabemos que os heróis de Homero tinham escribas que faziam aritmética em placas.

Os Maias da América Central, principalmente onde se situam actualmente o Iucatão e a Guatemala, estabeleceram uma civilização que perdurou 1500 anos, mas que alcançou o seu auge no chamado período clássico, por volta de 200-900 da nossa era. A aritmética dos Maias, decifrada principalmente através de inscrições existentes em monumentos de pedra e alguns códices e crónicas espanholas, estava muito ligada à astronomia, particularmente o sistema do calendário, que era vigesimal (ainda o é); representa por pontos as unidades até 4 e por barras horizontais os cincos até 15. Para os números mais elevados usavam um sistema de posição de base 20, sendo as potências de 20 designadas pelo mesmo símbolo que 20, o símbolo da unidade. Foram feitas algumas modificações devido ao calendário.

Este sistema de posição requeria um símbolo para o zero, muitas vezes uma espécie de concha ou um sinal representando um olho semiaberto. Este sistema e as suas relações com o calendário difundiram-se a outros povos da América Central. Pensamos no famoso calendário de pedra encontrado na cidade do México, datando da época dos Astecas, que chegaram àquela região no final do século XI da nossa éra.

Os Incas construíram um grande império nos e a oeste dos Andes, na América do Sul, a partir de meados do século XIII da nossa era, sendo Cuzco a sua capital. A vasta burocracia na administração, nos ofícios e na engenharia usava, para comunicar e para informar, não a escrita, mas os chamados *quipos*. O quipo mais simples tem uma corda principal de algodão colorido ou, por vezes, de lã, da qual estão suspensas cordas com nós dispostos em grupos à mesma distância uns dos outros. Cada grupo tem de 1 a 9 nós; por exemplo, um grupo de 4 seguido de um com 2 e de um com 8 nós representava o número 428. Deste modo constituía um sistema de posição, no qual o nosso zero era representado por uma distância maior entre os nós. As cores das cordas representavam coisas: carneiros, soldados, etc., e a posição das cordas, assim como as cordas adicionais suspensas, podiam dar informações estatísticas muito complicadas aos escribas que sabiam «ler» os quipos.

Os quipos podem ter centenas de cordas com nós; o maior até agora encontrado tem 1800 cordas; podia ter representado a composição de um exército ou de uma força de trabalhadores. Foram descobertos apenas 400 quipos, todos em túmulos, porque os Espanhóis destruíam os quipos, considerando-os ímpios.

Estes quipos ensinam-nos que podemos ter uma civilização burocrática e sofisticada sem a existência da escrita. É possível que culturas como a de Stonehenge tivessem meios de comunicação similares e registos de informação que desapareceram para sempre? Os quipos que sobreviveram estavam enterrados na região deserta ao longo do Pacífico; os que foram enterrados em regiões menos áridas perderam-se.



VASO PRÉ-DINÁSTICO EGÍPCIO
(Por cortesia do Museu Metropolitano de Arte.
Doação da Sr.ª Helen Miller Gould, 1910)

Além dos textos de Conant, Eels, Smith, Lietzmann, McGee e Speiser já referidos, ver:

Menninger, K., *Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2.ª ed., 2 vols., Gotinga, 1957-58.
Struik, D. J., «Stone Age Mathematics», in *Scientific American*, vol. 179, Dezembro de 1948, pp. 44-49.
Smith, D. E., e Ginsburg, J., *Numbers and Numerals*, New York Teacher's College, 1937.
Childe, Gordon, *What Happened in History*, Pelican Books, 1942.

São descritos padrões interessantes em:

Spier, L., «Plains Indian Parfleche Designs», in *Univ. of Washington Publ. in Anthropology*, vol. 4, 1931, pp. 293-322.
Deacon, A. B., «Geometrical Drawings from Malekula and Other Islands of the New Hebrides», in *J. Roy. Anthrop. Institute*, vol. 64, 1934, pp. 129-175.
Popova, M., «La géométrie dans la broderie bulgare», in *Comptes Rendus, Premier Congrès des Mathématiciens des pays slaves*, Varsóvia, 1929, pp. 367-369.

Sobre as matemáticas dos Índios americanos ver também:

Thompson, J. E. S., «Maya Arithmetic», in *Contributions to Amer. Anthrop. and History*, vol. 36, Carnegie Inst. of Whashington, publ. n.º 528, 1941, pp. 37-62.
Smith, D. E., *History of Mathematics*, Boston, 1923; reeditado em Dover, 2 vols. em 1, 1958 (Ver a extensa bibliografia da p. 14.)
Lounsbury, F. C., *Maya Numeration, Computation, and Calendrical Astronomy, DSB*, vol. 15, 1978, pp. 759-818. (Estudo detalhado com muita bibliografia.)
Ascher, M. e D., *Code of Quipos: A Study in Media, Mathematics and Culture*, Ann. Arbor, Mich., 1981. Ver também *AHES*, vol. 8, 1972, pp. 288-320, e *Visible Language*, Cleveland, Ohio, 1975, pp. 329-356.

Sobre matemática africana:

Zaslavsky, C., *Africa Counts*, Boston, 1973.
Crowe, D. W., «The Geometry of African Art», I, in *Journal of Geometry*, vol. 1, 1971, pp. 169-182; II, *HM*, vol. 2, 1975, pp. 253-271.

Sobre a astronomia e a matemática «megalíticas», por exemplo Stonehenge:

Hawkings, G. S., *Beyond Stonehenge*, Londres, 1973.
Haggie, D. C., *Megalithic Science*, Londres, 1981.

Sobre as relações entre rituais e matemática:

Seidenberg, A., «The Ritual Origin of Geometry», in *AHES*, vol. 1, 1960-61, pp. 480-527
—, «The Ritual Origin of Counting», in *AHES*, vol. 2, 1962, pp. 1-40.
—, «The Origin of Mathematics», in *AHES*, vol. 18, 1970, pp. 301-342.

Sobre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos na criança ver:

Riess, A., *Number Readiness in Research*, Chicago, 1947.
Piaget, J., *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel, 1941.
—, *Le développement des quantités chez l'enfant*, Neuchâtel, 1941.
Bunt, L. N. H., *The Development of the Ideas of Numbers and Quantity According to Piaget*, Groninga, 1951.
Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, 1973.

CAPÍTULO II

O Oriente Antigo

1

Durante o quinto, quarto e terceiro milénios a. C. surgiram formas de sociedade tecnicamente mais evoluídas, provenientes das comunidades neolíticas que se fixaram nas margens dos grandes rios de África e da Ásia, nas regiões subtropicais ou próximo delas. Primeiro ao longo do Nilo, do Tigre, do Eufrates, do Indo, depois ao longo do Ganges, do Huang Ho e, enfim, do Yang-Tse. Algumas sociedades na América poderão remontar a estes tempos.

As terras situadas ao longo desses rios podiam produzir colheitas abundantes desde que as cheias fossem devidamente controladas e os pântanos drenados. Os desertos áridos, as regiões montanhosas e as planícies que cercavam estas terras contrastavam com os vales do rios, que podiam transformar-se em terras muito férteis. No decorrer dos séculos, estes problemas foram resolvidos pela construção de barragens e diques, de canais e represas. A regulação do abastecimento de água exigiu a coordenação de actividades entre localidades muito afastadas numa escala que ultrapassou amplamente todos os esforços anteriores. Este facto conduziu ao estabelecimento de órgãos de administração central, localizados em centros urbanos, de pre-

ferência às povoações bárbaras dos primeiros períodos. O excedente relativamente grande produzido por uma agricultura intensiva bastante aperfeiçoada, não só melhorou os padrões de vida da população no seu conjunto, mas também criou uma aristocracia urbana encabeçada por poderosos chefes de clã. Existiam muitos ofícios especializados mantidos por artesãos, soldados, funcionários e sacerdotes. A administração das obras públicas estava nas mãos de uma burocracia permanente, um grupo conhecedor do ciclo das estações do ano, do movimento dos astros, da arte de dividir os campos, do armazenamento dos alimentos e do estabelecimento de impostos. Usava-se uma escrita para codificar as exigências da administração e os actos dos chefes.

Os seus conhecimentos técnicos incluíam a medicina e a metalurgia, assim como as artes do cálculo e da medição.

Por esta época, os grupos sociais estavam firmemente estabilizados. Existiam chefes militares, rendeiros e agricultores livres, artífices, escribas, funcionários, servos e escravos. Os chefes locais aumentaram tanto a sua riqueza e poder que se elevaram da condição de senhores feudais, com autoridade limitada, à de reis locais, com soberania absoluta. As querelas e as guerras que surgiam entre estes déspotas levaram à constituição de domínios maiores e à sua união numa monarquia única. Estas formas de sociedade baseadas na irrigação e na agricultura intensiva conduziram assim a uma forma de despotismo «oriental». Este despotismo podia ser mantido durante séculos, mas sucumbia, por vezes, devido ao impacte das tribos da montanha e do deserto, atraídas pela riqueza dos vales, ou então devido ao abandono do grande sistema de irrigação, que era vasto e complicado. Sob tais circunstâncias, o poder podia deslocar-se de um rei tribal para outro, ou então a sociedade podia fragmentar-se em pequenas unidades feudais e o processo de unificação recomeçar. Porém, apesar de todas estas revoluções dinásticas e das transições periódicas do feudalismo para o absolutismo, as povoações, que constituíam a base desta sociedade, permaneceram inalteradas e, com elas, o fundamental da estrutura eco-

nómica e social. A sociedade oriental funcionou por ciclos; mesmo no presente ainda existem comunidades africanas e asiáticas cujos padrões de vida persistiram durante muitos séculos. Com tais condições, o progresso foi lento e irregular e os períodos de crescimento cultural podiam estar separados por muitos séculos de estagnação e declínio.

Temos de ser cuidadosos em não atribuir o carácter da sociedade oriental exclusivamente ao facto de se basear na irrigação e na agricultura intensiva. As questões ligadas à posse da terra, as relações feudais e as antigas tradições familiares desempenharam os seus papéis, de maneiras várias, em diferentes países da Ásia, África e América. Todavia, permaneceram traços comuns entre estas diversas sociedades, o que constitui uma chave para compreender o tipo de matemática que se estabeleceu nelas: uma matemática do tipo aritmético-algébrico.

O carácter estático do «Oriente» (incluindo as sociedades americanas primitivas) transmitiu uma sacralidade fundamental às suas instituições, o que facilitou a identificação da religião com o aparelho de estado. Muitas vezes, a burocracia compartilhou deste carácter sagrado do estado; em muitos países orientais, os sacerdotes foram os administradores do poder. Desde que o desenvolvimento da ciência se tornou tarefa da burocracia, encontramos em muitas sociedades orientais —mas não em todas— os sacerdotes como principais suportes do conhecimento científico.

2

As matemáticas orientais surgiram como uma ciência prática com o objectivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. A ênfase inicial foi dada naturalmente à aritmética prática e à medição. Porém, uma ciência cultivada durante séculos como um ofício especial e cuja tarefa não é apenas aplicar, mas também ensinar os seus segredos, desenvolve

tendências para a abstracção. Gradualmente, ela virá a ser estudada por si própria. A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos —mas não mais do que isso— da geometria teórica.

Apesar de todos os negócios e do comércio a que estas sociedades antigas se entregavam, a sua base económica era agrícola e estava centralizada nas aldeias, que se caracterizavam pelo seu isolamento e tradicionalismo. O resultado foi que, apesar das semelhanças existentes na estrutura económica e nos traços essenciais do conhecimento científico, permaneceram sempre diferenças notáveis entre culturas diferentes. O isolamento dos Chineses, em certos períodos, e dos Egípcios foi notório. Sempre foi fácil diferenciar as artes e as escritas dos Egípcios, dos Mesopotâmios, dos Chineses e dos Indianos. Da mesma maneira, podemos falar das matemáticas egípcias, chinesas, mesopotâmicas e indianas, embora a sua natureza aritmético--algébrica seja, na generalidade, idêntica. Mesmo se a ciência de uma sociedade progredia mais do que a de outra em certo período, preservava um enfoque e um simbolismo característicos.

É difícil datar as descobertas no Oriente. O carácter estático da sua estrutura social contribuiu para conservar o conhecimento científico através de séculos ou mesmo de milénios. As descobertas feitas dentro do isolamento de uma cidade podiam não atingir outras localidades. Os registos do conhecimento científico e técnico foram destruídos por mudanças dinásticas, guerras ou inundações. Há uma história que nos conta que em 221 a. C., quando a China foi unificada por um déspota absoluto, Shi Huangdi (Shih Huang-ti), ele ordenou que todos os livros de estudo fossem destruídos. Mais tarde, muitos foram reescritos de memória, mas tais acontecimentos tornaram difícil a datação das descobertas.

Outra dificuldade na datação da ciência oriental deve-se ao material usado para a sua conservação. Os Mesopotâmios coziam placas de barro, que eram praticamente indestrutíveis[15]. Os Egípcios usaram o papiro e uma grande parte dos seus escritos conservaram-se devido ao clima seco. Os Chineses e os Indianos usaram material mais deteriorável, como a casca de árvore e o bambu. Os Chineses, cerca do século I a. C., começaram a utilizar o papel, mas conservaram poucos escritos datando de antes de 700 d. C. O nosso conhecimento das matemáticas orientais é, por esse motivo, impreciso. Em relação aos séculos pré-helenísticos estamos quase exclusivamente limitados ao material egípcio e mesopotâmico. Porém, é muito possível que novas descobertas nos conduzam a uma completa reavaliação dos méritos relativos das diferentes formas das matemáticas orientais. Durante muito tempo, o nosso campo histórico mais rico repousava no Egipto, devido à descoberta, em 1858, do chamado *Papiro de Rhind*, escrito por volta de 1650 a. C., mas que continha material ainda mais antigo[16]. Nas últimas décadas, o nosso conhecimento sobre a matemática babilónica foi muito alargado pelas notáveis descobertas de O. Neugebauer e F. Thureau-Dangin, que decifraram um grande número de placas de argila. É agora notório que a matemática babilónica era de longe mais desenvolvida do que a das outras sociedades orientais. Este juízo pode considerar-se definitivo, pois existe uma certa consistência no carácter factual dos textos babilónicos e egípcios através dos séculos. Além disso, o desenvolvimento económico da Mesopotâmia era maior do que o doutras sociedades localizadas no chamado Crescente Fértil do Próximo Oriente, que se estendia

[15] Excepto quando essas placas não foram cuidadosamente conservadas depois das escavações. Foi considerável o número de perdas devido à falta de cuidado no seu manejo.

[16] Chamado assim porque A. Henry Rhind (1833-63), banqueiro e antiquário escocês, o adquiriu em Luxor, no Nilo. Está no British Museum. Também é chamado *Papiro de Ahmes*, devido ao escriba que o copiou — o primeiro nome conhecido na história da matemática.

PÁGINA DO GRANDE *PAPIRO DE RHIND*
(Tirado de Chace, vol. II, p. 56)

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

01 m f·nph f·nḫ f·4̇ f·ż ꜥḥꜥ 1

ż 8ż 4̇ 4̇ ż 1 1 2

1 4i ż ż 3 2 3

7 4 4

4i ɉ ż 5 ꜥḥꜥ 3p dmd 4̇ ɉ 5

da Mesopotâmia ao Egipto. A Mesopotâmia era uma encruzilhada para um grande número de rotas de caravanas, enquanto o Egipto permaneceu comparativamente isolado. Por outro lado, o aproveitamento dos erráticos Tigre e Eufrates requeria mais perícia técnica e administração que o Nilo, «o mais cavalheiro de todos os rios» (citando Sir William Willcocks)[17]. Outros estudos da antiga matemática hindu podem ainda revelar uma inesperada excelência, não obstante, até ao presente, as sugestões nesse sentido não terem sido muito convincentes.

3

A maior parte dos nossos conhecimentos sobre a matemática egípcia deriva de dois papiros: o *Papiro de Rhind* (já mencionado), que contém 85 problemas, e o chamado *Papiro de Moscovo*, talvez dois séculos mais antigo, que contém 25 problemas. Estes problemas já eram há muito conhecidos quando estes manuscritos foram compilados, mas existem papiros menores, mais recentes —alguns do tempo do Império Romano—, que não apresentam diferenças de ponto de vista. Esta matemática baseava-se no sistema de numeração decimal, com sinais especiais para cada unidade mais elevada —processo com o qual estamos familiarizados através do sistema romano, que segue o mesmo princípio: MDCCCLXXVIII = 1878. Na base deste sistema, os Egípcios desenvolveram uma aritmética de carácter predominantemente aditivo, o que significa que a sua principal tendência era reduzir as multiplicações a adições sucessivas. Por exemplo, a multiplicação por 13 era obtida multiplicando primeiro por 1 e depois, dobrando sucessivamente, por 2, por 4 e por 8, e somando os resultados da multiplicação por 1, 4 e 8 (os componentes de 13).

---

[17] W. Willcocks, *Irrigation of Mesopotamia*, 2.ª ed., Londres, 1917, p. XI.

Exemplo para o cálculo de 13×11:

*1	11
2	22
*4	44
*8	88

Adicionando os números indicados com *, obtemos 143.

O aspecto mais notável da aritmética egípcia é o seu cálculo de fracções. Todas as fracções eram reduzidas a somas das chamadas «fracções unitárias», o que quer dizer fracções de numerador 1. Eram indicadas pelo número do denominador com um símbolo em cima, que nós indicaremos com uma barra. Assim, indicamos 1/10 por $\overline{10}$. As únicas excepções eram 1/2 e 2/3, para as quais existiam símbolos especiais. A redução a somas de fracções unitárias era possível através de tabelas, que davam a decomposição de fracções da forma $2/n$ — a única decomposição necessária por causa da multiplicação diádica. O *Papiro de Rhind* tem uma tabela que dá as equivalências em fracções unitárias para todos os números ímpares de 5 a 101, por exemplo:

$n = 5$	$\overline{3}\ \overline{15}$ $(2/5 = 1/3 + 1/15)$
7	$\overline{4}\ \overline{28}$
9	$\overline{6}\ \overline{18}$
59	$\overline{36}\ \overline{236}\ \overline{531}$
97	$\overline{56}\ \overline{679}\ \overline{776}$

O princípio subjacente a esta redução especial a fracções unitárias não é claro (por exemplo: porque é que, quando $n = 19$, a redução é $\overline{12}\ \overline{76}\ \overline{114}$, e não $\overline{12}\ \overline{57}\ \overline{228}$?). Este cálculo com fracções deu à matemática egípcia um carácter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com fracções unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média. A decomposi-

ção pressupunha alguma perícia matemática e existem teorias interessantes para explicar o caminho pelo qual os especialistas egípcios poderiam ter obtido os seus resultados[18].

Muitos problemas eram muito simples e não iam além de equações lineares com uma incógnita:

> A soma de 2/3, 1/2 e 1/7 de uma quantidade com ela própria dá 33. Qual é a quantidade?
>
> A resposta, 14 28/97, escreve-se em fracções unitárias:

$$14\ \bar{4}\ \overline{97}\ \overline{56}\ \overline{679}\ \overline{776}\ \overline{194}\ \overline{388}$$

Para a incógnita de uma equação existia um hieróglifo que significava «montão»; por exemplo, *hau* ou *aha*. A álgebra egípcia é, por isso, denominada por vezes «cálculo *aha*».

Os problemas, relacionados com a qualidade do pão e de diferentes tipos de cerveja, com a alimentação dos animais e o armazenamento do trigo, mostram a origem prática desta aritmética pouco cómoda e desta álgebra primitiva. Alguns problemas revelam um interesse teórico, como aquele em que se dividem 100 pães por 5 homens de tal forma que a parte recebida deve estar em progressão aritmética e 1/7 da soma das três maiores partes recebidas deve ser igual à soma das suas partes menores. Encontramos mesmo uma progressão geométrica relacionada com 7 casas, em cada uma das quais há 7 gatos, cada gato vigia 7 ratinhos, etc., o que revela o conhecimento da fórmula da soma de uma progressão geométrica[19].

---

[18] O. Neugebauer, «Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter», in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, vol. B1, 1931, pp. 301-380; B. L. van der Waerden, *Die Entstlhungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung*, vol. 4, 1938, pp. 359-382; E. M. Bruins, «Ancient Egyptian Arithmetic: 2/N», in *Proc. Nederl. Akad. Wet.*, vol. A 55, 1952, pp. 81-91.

[19] Pensamos na lengalenga infantil:

As I was going to St. Ives
I met a man with seven wives.
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,

Alguns problemas tinham natureza geométrica, relacionada, na sua maior parte, com a medição. A área do triângulo era dada pela metade do produto da base pela altura; a área do círculo de diâmetro d era dada por $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, o que conduzia a um valor de π de $256/81 = 3{,}1605$. Existiam também fórmulas para os volumes de sólidos, tais como o cubo, o paralelepípedo e o cilindro circular, todos concebidos como recipientes, principalmente de sementes. O resultado mais notável da medição egípcia foi a fórmula do valor do volume de uma pirâmide quadrangular truncada paralelamente à base, o chamado *frustum*: $V = (h/3)(a^2 + ab + b^2)$, onde a e b são os comprimentos dos lados dos quadrados e h a altura. Este resultado, de que ainda não foi encontrado um equivalente noutras formas de matemática antiga, é tanto mais notável quanto é certo que não há qualquer indicação de que os Egípcios tivessem sequer conhecimento do teorema de Pitágoras, apesar de algumas histórias infundadas sobre os *harpedonaptai*, que se supunha terem construído triângulos rectângulos com a ajuda de uma corda com $3 + 4 + 5 = 12$ nós[20].

Aqui devemo-nos acautelar com os exageros que dizem respeito à antiguidade dos conhecimentos matemáticos egípcios. Todas as formas de desenvolvimento científico foram atribuídas aos construtores de pirâmides de 3000 a. C. e de anos anteriores; existe mesmo uma história amplamente aceite segundo

---

Every cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?*

Podemos ver como o mesmo tipo de problema se pode manter através dos séculos.

* A tradução literal da lengalenga seria: «Ao ir para Santo Ivo, encontrei um homem com sete mulheres / Cada mulher com sete sacos, / cada saco com sete gatos, / cada gato com sete gatinhos. / Gatinhos, gatos, sacos e mulheres, / quantos iam para Santo Ivo?» *(N. do T.)*

[20] Ver S. Gandz, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, vol. I, 1930, pp. 255-277.

a qual os Egípcios, em 4212 a. C., adoptaram o chamado ciclo sótico para o calendário. Um trabalho matemático e astronómico de tal precisão não pode ser seriamente atribuído a um povo que emergiu lentamente das condições neolíticas e a fonte destas histórias encontra-se geralmente na tradição egípcia que nos foi transmitida posteriormente pelos Gregos. É uma característica comum às civilizações antigas atribuir datas de acontecimentos fundamentais a tempos muito remotos. Todos os textos disponíveis evidenciam uma matemática egípcia de objectivos muito limitados, embora com alguma sofisticação dentro desses limites. A sua astronomia encontrava-se no mesmo nível geral. Porém, com o nosso crescente respeito pelos conhecimentos de astronomia dos povos da idade da pedra ou emergindo dela, as nossas opiniões sobre este assunto poderão mudar.

4

As matemáticas mesopotâmicas atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias. Na Mesopotâmia podemos mesmo detectar um certo progresso no decorrer dos séculos. Os textos mais antigos, datados do 3.º milênio do último período sumério (a 3.ª dinastia de Ur data de cerca de 2100 a. C.), revelam já uma grande habilidade para calcular. Estes textos contêm tábuas de multiplicação nas quais um sistema sexagesimal bem desenvolvido se sobrepõe a um sistema decimal; existem símbolos cuneiformes que indicam 1, 60, 3600 e também 60^{-1}, 60^{-2}. Porém, esta não era a sua característica principal. Enquanto os Egípcios indicavam cada unidade mais elevada através de um novo símbolo, os Sumérios usavam o mesmo símbolo, mas indicavam o seu valor pela sua *posição.* Assim, 1 seguido por outro 1 significada 61 e 5 seguido por 6 e por 3 (devíamos escrever 5, 6, 3) significava $5 \times 60^2 + 6 \times 60 + 3 = 18363$. Este sistema de posição não diferia essencialmente do nosso próprio sistema de escrita de números, em que o símbolo 343 representa $3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$. Tal sistema tinha vantagens enormes

para o cálculo, como podemos verificar facilmente ao tentarmos realizar uma multiplicação no nosso próprio sistema e no sistema de numeração romano. O sistema de posição também eliminou muitas das dificuldades da aritmética fraccionária, tal como o nosso sistema decimal o faz em relação à escrita de fracções. Este sistema parece ter-se desenvolvido como um resultado directo da técnica de administração, tal como é indicado em milhares de textos datados do mesmo período relacionados com a distribuição do gado, do trigo, etc., e com operações aritméticas baseadas nestas transacções.

Existiam algumas ambiguidades neste tipo de cálculo porque o significado exacto de cada símbolo nem sempre era claro em função da sua posição. Assim (5, 6, 3) também podia significar $5 \times 60^1 + 6 \times 60^{10} + 3 \times 60^{-1} = 306\ 1/20$; a interpretação exacta tinha de ser deduzida do contexto. Outra incerteza era introduzida pelo facto de um espaço em branco significar por vezes zero, de modo que (11, 5) podia representar $11 \times 60^2 + 5 = 39605$. Ulteriormente apareceu um símbolo especial para representar zero, mas não até ao período persa. A chamada «invenção do zero» era, deste modo, um resultado lógico da introdução do sistema de posição, mas somente depois de a técnica de calcular ter atingido uma perfeição considerável.

Tanto o sistema sexagesimal como o sistema de posição ficaram na posse da humanidade. A nossa divisão actual das horas em 60 minutos e em 3600 segundos data dos Sumérios, assim como a divisão do círculo em 360 graus, cada grau em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos. Existem razões para acreditar que a escolha de 60, e não de 10, como unidade ocorreu numa tentativa de unificar sistemas de medida, embora o facto de 60 ter muitos divisores deva ter desempenhado também um papel importante nesta escolha. No que respeita ao sistema de posição, cuja importância se tem comparado à do alfabeto[21]

[21] O. Neugebauer, «The History of Ancient Astronomy», in *Journal of Near Eastern Studies*, vol. 4, 1945, p. 12.

(ambas as invenções substituíram um simbolismo complexo por um método facilmente compreendido por um grande número de pessoas), a sua história é ainda bastante obscura. É razoável supor que tanto os Hindus como os Gregos o adquiriram nas rotas das caravanas que passavam pela Babilónia; sabe-se também que os sábios do Islão o descreviam como uma invenção indiana.

5

O grupo seguinte de textos cuneiformes data da 1.ª dinastia babilónica, quando o rei Hammurabi reinou na Babilónia (*c.* 1750 a. C.) e uma população de origem semita dominou os Sumérios. Nestes textos encontramos a aritmética transformada numa álgebra bem estabelecida. Embora os Egípcios deste período fossem somente capazes de resolver equações lineares simples, os Babilónios da época de Hammurabi estavam na posse completa da técnica para manipular as equações quadráticas. Resolviam equações lineares e quadráticas com duas variáveis, e até mesmo problemas que envolviam equações cúbicas e biquadráticas. Formulavam esses problemas apenas com valores numéricos específicos para os coeficientes, mas os seus métodos não deixam dúvidas de que conheciam a regra geral. O exemplo seguinte é tirado de uma placa deste período[22]:

> Uma determinada área A, que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a 2/3 do lado do outro menos 10. Quanto medem os lados dos quadrados?
>
> Isto conduz às equações $x^2 + y^2 = 1000$, $y = 2/3\,x - 10$ e a solução pode encontrar-se resolvendo a equação quadrática
>
> $$\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$$
>
> que tem uma solução positiva, $x = 30$.

---

[22] K. Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, vol. II, Hanover e Paderborn, 1959, p. 50. A placa encontra-se em Estrasburgo, na Bibliothèque Nationale et Universitaire.

A solução nos textos cuneiformes limita-se — tal como em todos os problemas do Oriente — à simples enumeração dos passos númericos que têm de ser dados para resolver a equação quadrática.

Ache o quadrado de 10; dá 100; subtraia 100 de 1000; dá 900, etc. O número 1000 é escrito (16, 40), 900 é (15, 0), etc.

O forte carácter aritmético-algébrico da matemática babilónica transparece também na sua geometria. Tal como no Egipto, a geometria veio da fundamentação de problemas práticos relacionados com a medição, mas a forma geométrica de um problema era usualmente apenas uma maneira de apresentar uma questão algébrica. O exemplo anterior mostra como um problema que se relaciona com a área de um quadrado pode conduzir a um problema algébrico que não é trivial, e este exemplo não é excepção. Os textos mostram que a geometria babilónica do período semita possuía fórmulas para áreas de figuras rectilíneas simples e para volumes de sólidos simples, embora não tivessem descoberto ainda o volume do tronco de pirâmide. O chamado «teorema de Pitágoras» era conhecido, não apenas para casos especiais, mas com toda a generalidade, como uma relação numérica entre os lados de um triângulo rectângulo. Este facto conduziu à descoberta de «triplos pitagóricos», tais como (3, 4, 5), (5, 12, 13), etc. A característica principal desta geometria era, porém, o seu suporte algébrico. Este facto é igualmente verdadeiro para todos os textos posteriores, especialmente aqueles que datam do terceiro período, de que temos um número abundante de textos, o das eras neobabilónica, persa e selêucida (*c.* 600 a. C.-300 d. C.).

Os textos deste último período estão fortemente influenciados pelo desenvolvimento da astronomia babilónica, que naquela época tinha já alcançado nível científico, caracterizando-se por uma análise cuidadosa das diferentes efemérides, úteis também para a astrologia. A matemática tornava-se mais perfeita na sua técnica de cálculo; a álgebra procurava resolver problemas por meio de equações que ainda agora requerem uma

considerável habilidade numérica. Existem cálculos datados do período selêucida que vão até 17 unidades sexagesimais. Estas operações numéricas complicadas já não estavam relacionadas com problemas de lançamento de impostos ou de medição, mas foram estimuladas pelos problemas da astronomia ou pelo puro prazer do cálculo. As «matemáticas orientais» não eram decerto puramente práticas.

Muita desta aritmética computacional era feita com tabelas, que iam de simples tábuas de multiplicação a listas de recíprocos e de raízes quadradas e cúbicas. Uma tabela dá uma lista de números da forma $n^3 + n^2$, que eram usados, segundo parece, para resolver equações cúbicas, como $x^3 + x^2 = a$. Existiam algumas aproximações excelentes: $\sqrt{2}$ era dado por $1\frac{5}{12}$ ($\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $1\frac{5}{12} = 1{,}4167$)[23], e $1/\sqrt{2} = 0{,}7071$ por $17/24 = 0{,}7083$. As raízes quadradas parecem ter sido encontradas através de fórmulas como estas:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + h} = a + h/2a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

Na maior parte das matemáticas babilónicas, a melhor aproximação de π é a bíblica, em que $\pi = 3$ (1 Reis VII:23), sendo a área do círculo 1/12 do quadrado do seu perímetro. No entanto, foram encontradas aproximações que dão o valor de $\pi = 3\frac{1}{8}$[24].

A equação $x^3 + x^2 = a$ apareceu num problema que apela para a resolução das equações simultâneas $xyz + xy = 1 + 1/6$, $y = 2/3x$, $z = 12x$, que conduzem a $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$, donde $12x = 6$ (da tabela).

---

[23] O. Neugebauer, *Exact Science in Antiquity*, Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conf., Studies in Civilization, Filadélfia, 1941, pp. 13-29.

[24] E. M. Bruins e M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse*, Paris, 1961, p. 18.



UM LADO DE UM TEXTO CUNEIFORME, AGORA NO MUSEU BRITÂNICO
(Por cortesia do Museu Britânico)

Existem também textos cuneiformes com problemas de juros compostos, tal como a questão de saber em quanto tempo passará ao dobro uma determinada soma de dinheiro sujeita a 20% de juro. Este problema leva à equação $(1\frac{1}{5})^x = 2$, que é resolvida, primeiro, observando que $3<x<4$ e, depois, por uma interpolação linear (na nossa maneira de escrever):

$$4 - x = \frac{(1,2)^4 - 2}{(1,2)^4 - (1,2)^3}$$

conduzindo a $x = 4$ anos menos (2, 33, 20) meses.

Uma das razões específicas para o desenvolvimento da álgebra cerca de 2000 a. C. parece ter sido o uso da antiga escrita suméria pelos novos governantes semitas, os Babilónios. A antiga escrita consistia, tal como a escrita hieroglífica, num conjunto de ideogramas em que cada sinal indicava um único conceito. Os Semitas usavam-nos para a interpretação fonética da sua própria linguagem e tomavam também alguns sinais no seu significado antigo. Estes sinais exprimiam agora conceitos, mas eram pronunciados de uma maneira diferente. Tais ideogramas ajustavam-se bem a uma linguagem algébrica, tal como os nossos sinais +, —, :, etc., que são também verdadeiros ideogramas. Nas escolas babilónicas para administradores, esta linguagem algébrica fez parte do currículo durante muitas gerações e, embora o Império passasse pelas mãos de muitos governantes —Cassitas, Assírios, Medos e Persas—, a tradição manteve-se.

Os problemas mais intrincados datam dos últimos períodos da história da civilização antiga, especialmente os períodos persa e selêucida. A Babilónia, naqueles dias, já não era um centro político importante, mas continuou a ser durante muitos séculos o centro da cultura de um grande império, onde os Babilónios se misturaram com os Persas, Gregos, Judeus, Hindus e muitos outros povos. Em todos os textos cuneiformes há uma continuidade da tradição que parece apontar para um desenvolvimento local contínuo. Não há dúvida de que este desenvolvi-

mento local foi estimulado pelo contacto com outras civilizações e de que esse estímulo actuava nos dois sentidos. Sabemos que a astronomia babilónica deste período influenciou a astronomia grega e que a matemática babilónica influenciou o cálculo aritmético; é razoável supor que, por intermédio das escolas babilónicas de escribas, as ciências grega e hindu se tenham encontrado.

O papel da Mesopotâmia persa e selêucida na expansão da antiga astronomia e da matemática é ainda pouco conhecido, mas tudo indica que deve ter sido considerável. As ciências medievais árabe e hindu baseavam-se não só na tradição de Alexandria, mas também na da Babilónia.

6

Nas matemáticas orientais não se encontram tentativas daquilo a que se chama uma «demonstração». Não era apresentada nenhuma argumentação, mas somente a prescrição de certas regras: «Fazer tal, fazer assim.» Ignoramos a maneira pela qual os teoremas eram encontrados. Por exemplo: como é que os Babilónios tomaram conhecimento do teorema de Pitágoras? Existem várias tentativas para explicar o modo pelo qual os Egípcios e os Babilónios obtiveram os seus resultados, mas são todas de natureza hipotética. Para aqueles que foram educados na argumentação de Euclides, a maneira oriental de raciocinar parece, em primeiro lugar, estranha e bastante insatisfatória. Mas esta estranheza desaparece gradualmente quando compreendemos que a maior parte das matemáticas que ensinamos aos engenheiros e aos técnicos ainda é do tipo «fazer tal, fazer assim», sem muita preocupação de uma demonstração rigorosa. A álgebra ainda é pensada, em muitos liceus, mais como um conjunto de regras do que como ciência dedutiva. A matemática oriental parece não se ter nunca emancipado da influência milenar dos problemas tecnológicos e administrativos, para uso dos quais tinha sido inventada.

A questão das influências grega, chinesa e babilónica determina profundamente o estudo da antiga matemática hindu. Os sábios indianos e chineses de tempos mais próximos costumavam sublinhar —e algumas vezes ainda o fazem— a grande antiguidade da sua matemática, mas não existem textos que possam ser datados definitivamente da era pré-cristã. Os textos hindus mais antigos que existem provêm talvez dos primeiros séculos d. C.; os mais antigos textos chineses datam do mesmo período ou são um pouco anteriores. Sabemos que os antigos Hindus usavam sistemas de numeração decimal sem a notação de valor de posição. Tal sistema era formado pelos chamados numerais *brāhmī*, que tinham sinais especiais para cada número 1, 2, 3,..., 9, 10; 20, 30, 40,..., 100; 200, 300,..., 1000; 2000, ...; estes símbolos remontam, pelo menos, à época do rei Aśoka (*c.* 300 a. C.).

Nessa altura existiam os chamados *Śulvasūtras*, partes dos quais datam de 500 a. C. ou de antes e que contêm regras matemáticas que podem ser de uma antiga origem nativa. Estas regras são encontradas entre prescrições rituais, algumas delas relacionadas com a construção de altares. Encontramos aí fórmulas para a construção de quadrados e rectângulos e expressões para a relação entre a diagonal e os lados do quadrado e para a equivalência de círculos e quadrados. Há um certo conhecimento do teorema de Pitágoras em casos específicos e existem algumas aproximações curiosas em termos de fracções unitárias, tais como (na nossa notação):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} \ (= 1{,}4142156)$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}\right)^2 = 18(3-2\sqrt{2})$$

É curioso estes resultados dos *Śulvasūtras* não ocorrerem nos trabalhos hindus posteriores, o que mostra que não se pode falar

de continuidade na tradição da matemática hindu, tão típica nos Egípcios e nos Babilónios; esta continuidade pode, na realidade, estar ausente, sendo a Índia tão grande como é. Podem ter existido tradições diferentes, relativas a várias escolas. Sabemos, por exemplo, que o jainismo, que é tão antigo como o budismo (*c.* 500 a. C.), encorajou os estudos matemáticos; nos livros sagrados de Jaina é dado o valor $\pi = \sqrt{10}$[25].

8

O estudo da antiga matemática chinesa é dificultado pela falta de traduções e quase todos nós, que não somos sábios chineses ou apenas chineses, temos de nos contentar com as informações que se podem conseguir nos livros de Mikami (1913) e de Needham (1959) ou em artigos especiais. Actualmente existem vários textos traduzidos, entre eles uma tradução em russo e outra em alemão do clássico da matemática, *Jiu zhang suan-shu*[26] *(Chiu chang suan shu)*, ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Tanto este livro como o *Zhou bei (Chou pei)* datam, na sua forma actual, do período da dinastia Han (206 a. C.-220 d. C.), mas podem muito bem conter material mais antigo. O *Zhou bei* é só parcialmente matemático e tem interesse porque contém uma discussão do teorema de Pitágoras. Porém, os *Nove Capítulos* constituem um livro totalmente dedicado à matemática, já bastante característico da natureza da matemática da China, que perdurou por milhares de anos.

Também são muito antigos certos diagramas que podem ser encontrados em livros datados do período Han, tais como o

---

[25] B. Datta, «The Jaina School of Mathematics», in *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 21, 1929, pp. 115-146.

[26] Escrevemos as palavras chinesas seguindo a romanização de Pinyin, proposta em 1956 e actualmente cada vez mais utilizada. A romanização mais comum utilizada anteriormente aparece entre parênteses. Tenho de agradecer ao Dr. Raymond Lum, da Biblioteca de Harvard, no respeitante à romanização de Pinyin.

Yi-jing (I-ching ou *Livro das Mudanças).* Um destes diagramas é o quadrado mágico *(lo-shu)*:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

com o qual muitas lendas estão relacionadas.

A numeração chinesa foi sempre decimal, e já no segundo milénio a. C. encontramos números expressos com nove símbolos e com valor de posição. O sistema estabilizou-se no período Han, ou talvez antes. Os nove numerais eram expressos por um arranjo de paus de bambu, de modo que, por exemplo, ⊥ TT = TTTT significava 6729 e também era escrito dessa forma. As operações elementares eram efectuadas em tabuleiros de contas, com espaços em branco, onde colocaríamos zero (um símbolo especial para o zero aparece apenas no século XIII d. C., mas pode ser anterior). No cálculo do calendário era usado um tipo de sistema sexagesimal, um tanto comparável à combinação de duas rodas dentadas ligadas, uma com 12 outra com 10 dentes, de modo que 60 se tornasse uma unidade mais elevada, um ciclo (o *«cycle in Cathay»* de um poema de Tennyson).

A matemática dos *Nove Capítulos* consiste principalmente num conjunto de problemas com regras gerais para a sua solução; têm um carácter de cálculo aritmético e conduzem a equações algébricas com coeficientes numéricos. São obtidas raízes quadradas e cúbicas: por exemplo, $751\frac{1}{2}$ é tomado como raiz quadrada de $564752\frac{1}{4}$. Para as medidas circulares, π era considerado com o valor 3. Uma série de problemas conduzia a sistemas de equações lineares, como, por exemplo, o sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

que era escrito na forma de matriz dos coeficientes. A solução era efectuada por aquilo a que nós chamamos agora «transformações de matrizes». Nestas matrizes encontramos números negativos que aparecem pela primeira vez na história.

A matemática chinesa ocupa um lugar excepcional, pois a sua tradição permaneceu praticamente intacta até anos recentes, o que permite estudar um pouco melhor a sua posição na comunidade do que a da matemática egípcia ou babilónica, que pertencem a civilizações desaparecidas. Sabemos, por exemplo, que os candidatos a um exame tinham de revelar conhecimentos circunscritos aos clássicos e que este exame se baseava principalmente na capacidade de citar correctamente os textos através da memória. A sabedoria tradicional era assim transmitida de geração em geração, com uma determinada consciência moral. Numa tal atmosfera cultural estagnada, as novas descobertas tornavam-se excepções, o que garantia mais uma vez a invariabilidade da tradição matemática. Tal tradição podia ser transmitida através de milénios, sendo somente abalada ocasionalmente por grandes catástrofes históricas. Na Índia existiam condições semelhantes; temos exemplos de textos matemáticos hindus escritos em estrofes métricas para facilitar a memorização. Não há nenhuma razão particular para acreditar que a prática do antigo Egipto e da Babilónia pudesse ter sido diferente da indiana e da chinesa. A emergência de uma civilização inteiramente nova era necessária para interromper a ossificação relativa da matemática. A diferente concepção de vida, característica da civilização grega, trouxe finalmente a matemática aos padrões de um novo tipo de ciência.

BIBLIOGRAFIA

The Rhind Mathematical Papyrus, T. E. Peet, ed. Londres, 1923.

The Rhind Mathematical Papyrus, A. B. *et. al.* (eds.), 2 vols., Ohio, 1927-29. (Inclui muita bibliografia das matemáticas egípcias e babilónicas. Ver também a bibliografia, principalmente sobre astronomia antiga, em Neugebauer, *Exact Science in Antiquity,* Filadélfia, 1941, p. 18).

Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, W. W. Struve e B. A. Turajeff (eds.), Berlim, 1930.
Gillings, R. J., *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Cambridge, Mass., 1972 (reedição de Dover, 1982). (Ver *HM*, vol. 4, 1977, pp. 445-452, artigo de M. Bruckheimer e Y. Salomon.)
Neugebauer, O., *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften — I. Vorgriechische Mathematik*, Berlim, 1934.
—, *Mathematische Keilschrift-Texte*, 3 vols., Berlim, 1935-37.
—, *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton, 1952; 2.ª ed., 1957; reedição de Dover, 1969.
Neugebauer, O., e Sachs, A., *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven, 1945.
Thureau-Dangin, F., «Sketch of a History of the Sexagesimal System», in *Osiris*, vol. 7, 1939, pp. 95-141.
—, *Textes mathématiques babyloniens*, Leida, 1938.

Existem diferenças nas interpretações da matemática babilónica pelos dois autores precedentes. É expressa uma opinião em:

Gandz, S., «Conflicting Interpretations of Babylonian Mathematics», in *Isis*, vol. 31, 1940, pp. 405-425.

Ver também:

Bruins, E. M., e Rutten, M., *Textes mathématiques de Suse*, Paris, 1961.
Vogel, K., *Vorgriechische Mathematik*, 2 vols., Hanôver-Paderborn, 1958-59.

Uma mais antiga visão de conjunto das matemáticas pré-gregas é dada em:

Archibald, R. C., «Mathematics Before the Greeks», in *Science*, vol. 71, 1930, pp. 109-121 e 342. Ver também *ibid.*, vol. 72, 1930, p. 36.
Smith, D. E., «Algebra of 4000 Years Ago», in *Scripta math.*, vol. 4, 1936, pp. 111-125.

Sobre a matemática indiana ver os volumes do *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* e:

Datta, B., e Singh, A. N., *History of Hindu Mathematics*, 2 vols., Lahore, 1035-38. (Revisto por O. Neugebauer em *Quellen und Studien*, vol. 3B, 1936, pp. 262-271.)
Gurjar, L. V., *Ancient Indian Mathematics and Vedha*, Poona, 1947. (Ver também *Math Rev.*, vol. 9, 1948, p. 73.)
Kaye, G. R., «Indian Mathematics», in *Isis*, vol. 2, 1919, pp. 326-356.
Seidenberg, A., «The Ritual Origin of Geometry», in *AHES*, vol. 1, 1962, pp. 488-527.
Müller, C., «Die Mathematik der Śulvasūtra», in *Abh. math. Seminar Univ. Hamburg*, vol. 7, 1929, pp. 173-204.

Sobre matemática chinesa e japonesa ver:

Mikami, Y., *The Development of Mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913.

Berezkina, E. I., «The Ancient Chinese Treatise 'Mathematics in Nine Chapters'», in *Istor.-mat. Issled.*, vol. 10, 1957, pp. 423-584 (em russo).

Edição alemã:

Chiu Chang Suan Shu, Neun Bücher arithmetischer Technik, übers. und erläutert von K. Vogel, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Neue Folge 4, Brauschweig, 1908.

Needham, J., *Science and Civilization in China*, Cambridge, 1959. (Ver vol. III, pp. 1-168.) Actualmente é a nossa principal fonte de informações.

Haudricourt, A., e Needham, J., «La science chinoise antique», in *Histoire générale des Sciences*, Paris, 1957, vol. 1, pp. 184-201.

Libbrecht, U., *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-Shu Chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, Cambridge, Mass., 1973.

Lam, L. Y., *A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa. A Thirteenth Century Chinese Mathematical Treatise*, Singapura, 1977.

The I Ching ou *Book of Changes*, trad. de R. Wilhelm, Nova Iorque, 1950, e de J. Legge, Londres, 1899 (reedição de Dover, 1963).

Gillon, B. S., «Introduction, Translation and Discussion of Chao Chun-ch'ing's Notes to the Diagram of Short Legs and Long Legs and of Squares and Circles», in *HM*, vol. 4, 1977, pp. 253-293.

Struik, D. J., «On Ancient Chinese Mathematics», in *Mathematics Teacher*, vol. 56, 1963, pp. 424-431; ver também *Euclides*, vol. 40, 1964, pp. 65-79.

Sobre a natureza da sociedade oriental ver os livros indicados a seguir e a bibliografia dada no capítulo IV:

Wittfogel, K. A., «Die Theorie der orientalischen Gesellschaft», in *Zeitschrift für Sozialforschung*, vol. 7, 1938, pp. 90-122. Também «Le mode de production asiatique», in *La Pensée*, vol. 114, 1964, pp. 3-73.

Needham, J., «Science and Society in East and West», in *Science and Society*, vol. 28, 1964, pp. 385-408.

Ver também sobre matemática oriental:

van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, 2.ª ed., Nova Iorque, 1961. (Trad. do holandês: Groninga, 1950.)

Vol. XV, suplemento I de *DSB* (Nova Iorque, 1978), contém nas pp. 531-818 «Topical Essays» sobre «Mathematical Astronomy in India» (D. Pingree); «Man and Nature in Mesopotamian Civilization» (A. L. Oppenheim); «Mathematics and Astronomy in Mesopotamia» (B. L. van der Waerden); «The Mathematics of Ancient Egypt» (R. J. Gillings); «Egyptian Astronomy, Astro-

logy and Calendrical Reckoning» (R. A. Pinker); «Japanese Scientific Thought» (S. Nakayama); e «Maya Numeration, Computation and Calendrical Astronomy» (F. C. Lounsbury).

van der Waerden, B. L., «On Pre-Babylonian Mathematics» (I, II), in *AHES*, vol. 23, 1980, pp. 1-26 e 27-46. (Sobre as fontes pré-históricas possíveis das matemáticas chinesas, babilónicas e egípcias ver Seidenberg, *AHES*, vol. 18, 1978, pp. 301-342.)

CAPÍTULO III

A Grécia

1

Na bacia do Mediterrâneo e à sua volta deram-se grandes transformações económicas e políticas durante os últimos séculos do segundo milénio. Numa atmosfera turbulenta de migrações e guerras, a idade do bronze foi substituída pela que é chamada a nossa idade, a idade do ferro. São pouco conhecidos os pormenores deste período de revoluções, mas sabe-se que, no final deste período, talvez cerca de 900 a. C., os mundos minóico, micénico e hitita tinham desaparecido; o poder do Egipto e o da Babilónia estavam muito reduzidos e novos povos se tinham estabelecido historicamente. Entre estes povos destacavam-se os Hebreus, os Assírios, os Fenícios e os Gregos. A substituição do bronze pelo ferro não só transformou a arte da guerra, mas, baixando o custo dos instrumentos de produção, também aumentou o excedente social, estimulou o comércio e permitiu uma maior participação dos cidadãos nas questões económicas e de interesse público. Isto reflectiu-se em duas grandes inovações: a substituição da escrita grosseira do antigo Oriente por um alfabeto fácil de aprender e a introdução da moeda cunhada, que ajudou a estimular o comércio. Tinha chegado a altura em que os cultos religiosos e científicos não podiam ser por mais tempo domínio exclusivo de uma burocracia oriental.

As actividades dos «piratas», tal como são referidos alguns dos povos migratórios nos textos egípcios, foram acompanhadas, de início, por grandes prejuízos culturais. As civilizações minóica e micénica desapareceram; a arte egípcia entrou em declínio; a ciência egípcia e a ciência babilónica estagnaram durante séculos. Nenhum texto matemático deste período de transição chegou até nós. Quando foram restabelecidas relações estáveis, o antigo Oriente recuperou-se, retomando as suas linhas tradicionais; estava preparado o cenário para uma civilização de tipo inteiramente novo, a civilização grega, da qual os poemas de Homero preservaram a única memória verbal do passado micénico.

As cidades que surgiam ao longo da costa da Ásia Menor e no continente grego já não eram centros administrativos de um despotismo oriental. Eram cidades comerciais, onde os antigos senhores feudais, proprietários de terras, tinham de lutar contra uma classe de mercadores independentes e politicamente conscientes. Durante os séculos VII e VI a. C., esta classe mercantil ganhou influência e teve de lutar com os pequenos comerciantes e artesãos, o *demos*. Como resultado, deu-se a ascensão da *polis* grega, ou seja, a cidade-estado autónoma, facto que constituiu uma experiência social nova completamente diferente da das antigas cidades-estados da Suméria e de outros países orientais. As mais importantes destas cidades-estados desenvolveram-se na Jónia, na costa da Anatólia. O seu crescimento comercial ligou-as a toda a costa mediterrânica, à Mesopotâmia, ao Egipto, à Cítia e a outras regiões mais distantes. Durante muito tempo, Mileto ocupou o lugar principal. Outras cidades costeiras também enriqueciam e ganhavam importância no continente grego, primeiro Corinto, depois Atenas; na costa italiana, Crotona e Tarento; na Sicília, Siracusa.

Esta nova organização social criou um novo tipo de homem. Os mercadores nunca tinham desfrutado de tanta independência, mas sabiam que esta independência era o resultado de uma luta constante e dura. A antiga visão estática do Oriente jamais

poderia ser a sua. Viviam num período de descobertas geográficas comparáveis apenas às descobertas do século XVI no Ocidente europeu; não aceitavam a monarquia absoluta ou o poder conferido por uma divindade estática. Além disso, podiam fruir de um certo lazer, resultado da riqueza e do trabalho dos escravos. Podiam filosofar acerca do seu mundo. A ausência de uma religião instituída conduziu muitos habitantes destas cidades costeiras a uma certa forma de misticismo, mas também, em sentido oposto, estimulou o desenvolvimento do racionalismo e da visão científica do mundo.

2

A moderna matemática nasceu na atmosfera do racionalismo jónico — uma matemática que colocava não só a questão «Como?», mas também a moderna questão científica «Porquê?». Tradicionalmente, o pai da matemática grega é Tales de Mileto, um mercador que visitou a Babilónia e o Egipto na primeira metade do século VI a. C. A sua figura é lendária, mas encerra algo de eminentemente real. Ela simboliza as circunstâncias sob as quais foram estabelecidos os fundamentos não só da nova matemática, mas também da ciência e da filosofia modernas.

Os primeiros estudos de matemática grega tinham um objectivo principal: compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional. A matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as ideias em sequências lógicas, a encontrar princípios fundamentais. Era a mais racional de todas as ciências e, embora existam poucas dúvidas quanto à aquisição da matemática oriental pelos mercadores gregos, através das suas rotas comerciais, os Gregos descobriram depressa que os Orientais tinham deixado por fazer a maior parte da sua racionalização. Porque é que o triângulo isósceles tinha dois ângulos iguais? Porque é que a área de um triângulo era igual a metade da área de um rectângulo com a mesma base e

altura? Estas questões surgiam naturalmente ao homem, que fazia perguntas semelhantes na cosmologia, na biologia e na física.

Infelizmente, não existem fontes que nos possam dar um panorama do desenvolvimento inicial da matemática grega. Os códices existentes provêm da era cristã e islâmica e são apenas escassamente completados por notas de papiros egípcios um pouco mais antigos. Os estudos clássicos, porém, possibilitaram-nos a reconstituição de textos do século IV a. C. e de tempos mais recentes; deste modo, possuímos edições confiáveis de Euclides, de Arquimedes, de Apolónio e de outros grandes matemáticos da antiguidade. Mas estes textos apresentam uma ciência matemática já completamente elaborada, na qual o seu desenvolvimento histórico é difícil de definir, mesmo com a ajuda de comentários posteriores. Para nos informarmos sobre os anos de formação da matemática grega temos de reler inteiramente pequenos fragmentos transmitidos por autores mais recentes e observações dispersas de filósofos e de outros que não eram autores estritamente matemáticos. O grande engenho e a crítica paciente dos textos elucidaram muitos pontos da história antiga, e é devido a este trabalho (efectuado por investigadores como Paul Tannery, T. L. Heath, H. G. Zeuthen, E. Frank e ainda hoje continuado por outros) que podemos apresentar de uma forma consistente, mas também algo hipotética, o panorama da matemática grega nos primeiros anos da sua formação.

3

No século VI a. C. surgiu um novo e vasto poder oriental nascido das ruínas do Império Assírio: a Pérsia de Aqueménides. Os Persas conquistaram as cidades da Anatólia, mas a estrutura social do continente grego encontrava-se já demasiado consolidada para poder sofrer uma derrota. A invasão persa foi repelida nas batalhas históricas de Maratona, Salamina e Pla-

teia. O resultado principal das vitórias gregas foi a expansão e a hegemonia de Atenas. Nessa cidade, sob o domínio de Péricles, na segunda metade do século V a. C., os elementos democráticos tornaram-se cada vez mais influentes. Constituíam a força condutora da expansão económica e militar e, por volta de 430 a. C., fizeram de Atenas não apenas a cabeça do Império Grego, mas também o centro de uma nova e fascinante civilização — a idade de ouro da Grécia.

No quadro das lutas políticas e sociais, filósofos e professores apresentavam as suas teorias e, com elas, a nova matemática. Pela primeira vez na história, um grupo de homens críticos, os «sofistas», menos preocupados com a tradição do que qualquer outro grupo ilustrado surgido anteriormente, abordavam problemas de natureza matemática, como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e moral, desenvolvendo uma matemática mais no espírito da compreensão que da utilidade. Como esta atitude mental dos sofistas permitiu que eles abordassem os fundamentos do pensamento exacto, seria para nós muito importante seguir as suas discussões. Infelizmente, existe apenas um único fragmento documental completo com interesse para a matemática; é escrito pelo filósofo jónico Hipócrates de Quios[27]. Este fragmento apresenta raciocínios matemáticos com um elevado grau de perfeição e relaciona-se, como é característico, com um assunto curioso e pouco prático, mas teoricamente válido, as chamadas *lunulae* — as pequenas luas ou crescentes delimitados por dois arcos circulares.

O assunto —encontrar determinadas áreas delimitadas por dois arcos circulares que podem ser expressos racionalmente em termos dos diâmetros— relaciona-se directamente com o problema da quadratura do círculo, que constituiu um problema central na matemática grega. Na análise do problema, Hipócra-

[27] Não confundir com o médico Hipócrates de Cós, aproximadamente da mesma época.

tes[28] demonstrou que os matemáticos gregos da idade de ouro da Grécia possuíam um sistema ordenado de geometria plana, em que o princípio da dedução lógica *(apagoge)*, que permitia inferir uma afirmação a partir de outra, tinha sido inteiramente aceite. Era o início da axiomática, como é indicado pelo nome do livro supostamente escrito por Hipócrates, *Elementos (Stoicheia)*, que é o título de todos os tratados axiomáticos gregos, incluindo o de Euclides. Hipócrates investigou as áreas de figuras planas delimitadas por linhas rectas ou por arcos circulares.

Ensinou que as áreas de segmentos circulares semelhantes estavam entre si como os quadrados das suas cordas. Conhecia o teorema de Pitágoras e a correspondente desigualdade para triângulos não rectângulos. A sua obra já se situa naquilo a que podíamos chamar tradição euclidiana; no entanto, precede Euclides em mais de um século.

O problema da quadratura do círculo é um dos «três famosos problemas matemáticos da antiguidade» que começavam a constituir objecto de estudo neste período. Estes problemas eram os seguintes:

1. A trissecção do ângulo; ou seja, o problema de dividir um ângulo dado em três partes iguais;
2. A duplicação do cubo; ou seja, encontrar o lado do cubo do qual o volume é o dobro do volume de um cubo dado (o chamado problema *délico*);
3. A quadratura do círculo; ou seja, encontrar um quadrado de área igual à de um círculo dado.

A importância destes problemas consiste no facto de eles não poderem ser resolvidos geometricamente pela construção de um

---

[28] Para uma análise moderna ver E. Landau, «Über quadrirbare Kreisbogenzweiecke», in *Berichte Berliner Math. Ges.*, vol. 2, 1903, pp. 1-6. Ver também T. Dantzig, *The Bequest of the Greeks*, Nova Iorque, 1955, cap. 10, e *DSB*, vol. 6, 1972, pp. 411-416.

número finito de linhas rectas e círculos senão por aproximação, constituindo um meio de alcançar novos campos da matemática. Os dois primeiros problemas reduziam-se muitas vezes à procura de dois segmentos de recta x e y, tais que $a:x = x:y = y:b$, em que a e b eram segmentos de recta dados. Este problema é uma extensão da procura de um x para o qual $a:x = x:b$, ou seja, da procura de um proporcional geométrico (ou meio proporcional). No entanto, a proporção geométrica dupla não pode ser resolvida apenas por meio de compasso e régua. Este facto conduziu à descoberta das secções cónicas, de algumas curvas cúbicas e quárticas e de uma curva transcendente: a *quadratriz*. As formas anedóticas pelas quais estes problemas nos foram transmitidos (oráculos délficos, etc.) não nos devem levar a ignorar a sua importância fundamental. Acontece frequentemente um problema fundamental ser apresentado na forma de uma anedota ou de um *puzzle* — a maçã de Newton, a promessa não cumprida de Cardano ou os barris de vinho de Kepler são exemplos disso. Matemáticos de diferentes períodos, incluindo o nosso, têm mostrado a relação entre os problemas gregos e a teoria moderna das equações, implicando considerações relativas aos domínios da racionalidade, dos números algébricos e da teoria dos grupos[29].

4

Para além dos sofistas, que estavam em certo grau ligados ao movimento democrático, existia provavelmente um outro grupo de filósofos virados para a matemática e que se relacionavam com elementos aristocráticos. Eram os chamados «pitagóricos», de cuja escola foi mítico fundador Pitágoras, que se supõe ter sido um místico, um cientista e um estadista aristo-

---

[29] Ver, por exemplo, F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Leipzig, 1895; e F. Enriques, *Fragen der Elementarmathematik*, Leipzig, 1907, vol. II.

crático. Enquanto a maior parte dos sofistas dava ênfase à realidade da mudança —especialmente os atomistas, seguidores de Leucipo e de Demócrito—, os pitagóricos salientavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. Na procura de leis eternas do universo, os pitagóricos estudaram geometria, aritmética, astronomia e música (o que mais tarde se chamaria o *quadrivium*). O seu chefe foi Arquitas de Tarento, que viveu cerca de 400 a. C. e a cuja escola se devem atribuir, se aceitarmos a hipótese de E. Frank, muitos resultados da matemática pitagórica. A sua aritmética era uma ciência altamente especulativa que tinha pouco em comum com a contemporânea técnica computacional da Babilónia. Os números (isto é, os inteiros, chamados *arithmoi*) eram divididos em classes: ímpares, pares, pares vezes pares, ímpares vezes ímpares, primos e compostos, perfeitos, amigos, triangulares, quadrados, pentagonais, etc. Alguns dos resultados mais interessantes relacionam-se com os «números triangulares», que representam uma ligação entre a geometria e a aritmética:

1, . . 3, . . . 6, 10, etc.

O nome «números quadrados» teve origem nas especulações pitagóricas.

1, 4, 9, etc.

As figuras são muito mais antigas, tendo algumas já aparecido na cerâmica neolítica. Os pitagóricos investigavam as propriedades desses números, acrescentando-lhes uma marca do seu misticismo e colocando-os no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações

numéricas («tudo é número»). Um ponto era «unidade em posição»[30].

Eram de particular importância as razões entre números *(logos*, lat. *ratio)*. A igualdade de razões formava uma proporção. Distinguiam uma proporção aritmética ($2b = a + c$) de uma geométrica ($b^2 = ac$) e de uma harmónica $\left(\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ e interpretavam-nas filosófica e socialmente[31].

Os pitagóricos conheciam algumas propriedades dos polígonos regulares e dos sólidos regulares. Demonstraram como o plano pode ser preenchido com triângulos regulares, quadrados ou hexágonos regulares e o espaço com cubos, ao que Aristóteles tentou mais tarde acrescentar a noção errada de que o espaço pode ser preenchido com tetraedros regulares[32]. Os pitagóricos também deviam ter conhecido o octaedro e o dodecaedro — a última figura devido ao facto de a pirite, que se encontra em Itália, cristalizar em dodecaedros; modelos dessas figuras, tais como ornamentos e símbolos mágicos, datam do período etrusco, surgindo entre os povos celtas da Europa central durante os inícios da idade do ferro, cerca de 900 a. C. e mais tarde (a pirite é um minério de ferro)[33].

Em relação ao teorema de Pitágoras, os pitagóricos atribuíam a descoberta ao seu mestre, supondo-se que ele tinha sacrificado cem bois aos deuses como prova de gratidão. Vimos que o teorema já era conhecido na Babilónia de Hammurabi, mas a pri-

---

[30] Sobre a aritmética dos pitagóricos ver B. L. van der Waerden, *Math. Annallen*, vol. 120, 1948, pp. 127-153 e 676-700.

[31] Em forma mais familiar, as três proporções escrevem-se: $a - b = b - c$, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$. *(N. do T.)*

[32] D. J. Struik, *Nieuw Arch. v. Wiskunde*, vol. 15, 1925, pp. 121-137; M. Senechal, «Which Tetrahedra Fill Space?», in *Mathematics Magazine*, vol. 54, 1981, pp. 227-243.

[33] F. Lindemann, *Sitzungsberichte bayr Ahad. Wiss, München*, vol. 26, 1897, pp. 625-758. Também *ibid.*, 1934, pp. 265-275.

meira prova geral pode muito bem ter sido obtida na escola pitagórica. Enquanto os Babilónios o consideraram basicamente como um resultado de medições, os pitagóricos concebiam-no como um teorema geométrico abstracto.

A descoberta mais importante atribuída a Pitágoras foi a dos «irracionais» por meio de segmentos de recta incomensuráveis. Esta descoberta pode ter sido o resultado do seu interesse pela média geométrica $a:b = b:c$, que servia como símbolo da aristocracia. Qual é a média geométrica de 1 e 2, dois símbolos sagrados? Esta questão conduziu ao estudo da razão entre a diagonal e o lado do quadrado e descobriu-se que esta razão não podia ser expressa por «números» — isto é, por aqueles números a que chamamos actualmente «números racionais» (inteiros, ou fraccionários), os únicos números que eram reconhecidos como tal. Isto pode ser visto do seguinte modo, de acordo com Aristóteles[34]:

> Suponhamos que aquela razão é $p:q$, na qual podemos sempre tomar p e q como números primos entre si. Então $p^2 = 2q^2$, pelo que p^2, e portanto p, é par, digamos $p = 2r$. Então, q tem de ser ímpar; mas, visto que $q^2 = 2r^2$, q também tem de ser par. Esta contradição não foi resolvida, como no Oriente ou na Europa do Renascimento, por uma extensão do conceito de número, mas rejeitando a teoria dos números para tais casos e procurando uma síntese na geometria.

Esta descoberta, que perturbou a harmonia da aritmética e da geometria, foi feita provavelmente nas últimas décadas do século V a. C. Surgia de outra dificuldade, que tinha emergido dos argumentos relacionados com a realidade da mudança, argumentos que têm prendido a atenção dos filósofos, desde essa época até à actualidade. Esta dificuldade tem sido atribuída a Zenão de Eleia (*c.* 450 a. C.), discípulo de Parménides, um filósofo conservador, para quem a razão só reconhece o ser abso-

---

[34] Aristóteles, em *Analytica Priora* (I, 23), sugere apenas esta prova como um exemplo de *reductio ad absurdum*. Para a prova ver T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, reedição de Dover, 1956, vol. III, p. 2.

luto, sendo toda a mudança apenas aparente. Isto passou a ter significado matemático quando os processos infinitos tiveram de ser estudados em questões tais como a determinação do volume da pirâmide. Aqui, os paradoxos de Zenão entravam em conflito com algumas concepções antigas e intuitivas sobre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande. Acreditou-se sempre que a soma de um número infinito de quantidades se podia tornar tão grande quanto se quisesse, mesmo que cada quantidade fosse extremamente pequena ($\infty \times \epsilon = \infty$), e também que a soma de um número finito ou infinito de quantidades de dimensão zero era zero ($n \times 0 = 0$, $\infty \times 0 = 0$). O criticismo de Zenão desafiou estas concepções e os seus quatro paradoxos criaram uma agitação, cujos efeitos ainda podem ser observados actualmente. Os paradoxos foram retomados por Aristóteles e são conhecidos pelos nomes de *Aquiles, seta, dicotomia* e *estádio*. São enunciados de maneira a salientar contradições existentes nos conceitos de movimento e de tempo; nenhuma tentativa satisfatória é feita para resolver estas contradições.

O essencial dos raciocínios surge claramente nos paradoxos de *Aquiles* e da *Dicotomia*, que explicamos com palavras nossas, como segue:

Aquiles. Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direcção, ao longo de uma linha recta. Aquiles é mais veloz do que a tartaruga, mas, para alcançar a tartaruga, ele tem de passar primeiro pelo ponto P, do qual a tartaruga partiu. Quando chega a P, a tartaruga já avançou para o ponto P_1. Aquiles não pode alcançar a tartaruga sem passar por P_1, mas a tartaruga avançou para um novo ponto, P_2. Quando Aquiles estiver em P_2, a tartaruga estará em P_3, etc. Por isso, Aquiles nunca poderá alcançar a tartaruga.

Dicotomia. Suponhamos que me desloco de A para B, ao longo de uma linha recta. Para atingir B preciso primeiro de percorrer metade da distância de A a B e, para alcançar B_1, a meio caminho entre A e B, preciso de atingir B_2, a meio caminho entre A e B_1. Isto continua indefinidamente, de modo que o movimento não pode mesmo *iniciar-se*.

Os argumentos de Zenão mostravam que um segmento finito pode ser dividido num número infinito de pequenos segmentos,

cada um deles com um comprimento finito. Também mostravam que é difícil explicar o que se entende pela afirmação de que uma linha é «composta» por pontos. É muito provável que o próprio Zenão não se apercebesse das implicações matemáticas dos seus argumentos. Os problemas que conduziram aos seus paradoxos têm surgido regularmente durante discussões filosóficas e teológicas; reconhecemo-los como problemas que dizem respeito à relação entre «infinito potencial» e «infinito actual». Paul Tannery, porém, acreditava que os argumentos de Zenão eram particularmente dirigidos contra a ideia pitagórica do espaço como soma de pontos («o ponto é unidade em posição»)[35]. Qualquer que seja a interpretação, o raciocínio de Zenão influenciou o pensamento matemático de muitas gerações. Os seus paradoxos podem ser comparados aos que foram usados pelo bispo Berkeley em 1734, quando mostrou os absurdos lógicos a que podia conduzir uma má formulação dos princípios do cálculo [infinitesimal], mas sem oferecer uma fundamentação melhor.

Os argumentos de Zenão começaram a preocupar ainda mais os matemáticos, depois de terem sido descobertos os irracionais. Era a matemática possível como ciência exacta? Tannery[36] sugere que se pode falar de «um verdadeiro escândalo lógico» — uma «crise» na matemática grega[37]. Se é este o caso, esta crise teve origem no período final da guerra do Peloponeso, terminando com a queda de Atenas (404 a. C.). Podemos então detectar uma relação entre a crise da matemática e a crise do sistema social, pois a queda de Atenas significou a ruína do império da

---

[35] P. Tannnery, *La géométrie grecque*, Paris, 1887, pp. 217-261. É dada outra opinião em B. L. van der Waerden, *Math. Annalen*, vol. 117, 1940, pp. 141-161.

[36] Id., *Ibid.*, p. 98. Tannery, neste ponto, trata apenas do declínio da antiga teoria das proporções como resultado da descoberta dos segmentos de recta incomensuráveis.

[37] Sobre este assunto ver H. Freudenthal, «Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'Antiquité?», in *Bull. soc. math. Belgique*, vol. 18, 1966, pp. 43-55.

democracia esclavagista e introduziu um novo período de supremacia aristocrática — uma crise que foi resolvida no espírito deste novo período.

5

Foi característico deste novo período da história da Grécia o aumento da riqueza de algumas camadas das classes dirigentes, acompanhado por igual crescimento da miséria e da insegurança dos pobres. As classes dirigentes sustentavam a sua existência material cada vez mais através da escravatura, o que lhes permitia tempo de lazer para desenvolverem as artes e as ciências, mas faziam-no de um modo adverso a todo o tipo de trabalho manual. Um senhor ocioso olhava com superioridade para o trabalho dos escravos e dos artífices e procurava libertar-se do seu aborrecimento estudando filosofia e ética. Platão e Aristóteles tomaram esta atitude; e é na *República*, de Platão (escrita talvez em 360 a. C.), que encontramos a expressão mais clara dos ideais da classe dirigente esclavagista. Os «guardas» da *República*, de Platão, deviam estudar o *quadrivium*, que consistia na aritmética, geometria, astronomia e música, a fim de entender as leis do universo[38]. Esta atmosfera intelectual conduziu (no período inicial pelo menos) à discussão dos fundamentos da matemática e à cosmogonia especulativa. Pelo menos três grandes matemáticos deste período estiveram ligados à Academia de Platão, nomeadamente Arquitas, Teeteto (m. 369 a. C.) e Eudoxo (*c*. 408-355 a. C.). A Teeteto atribuiu-se a teoria dos irracionais tal como aparece do décimo livro dos *Elementos*, de Euclides. O nome de Eudoxo está ligado à teoria das proporções, que Euclides dá no seu quinto livro, e também ao chamado «método de exaustão», que permitiu um tratamento rigoroso dos cálculos de áreas e volumes. Isto significa que foi Eudoxo

---

[38] À entrada da Academia de Platão lia-se, segundo fontes posteriores, a máxima: «Que não entre quem não saiba geometria.»

quem resolveu a «crise» da matemática grega; as suas formulações rigorosas ajudaram a determinar o rumo da axiomática grega e, de maneira considerável, da matemática grega como um todo.

A teoria das proporções de Eudoxo pôs de parte a teoria aritmética dos pitagóricos, que se aplicava apenas a quantidades comensuráveis. Era uma teoria puramente geométrica, que, na sua forma estritamente axiomática, tornava supérflua qualquer referência a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis.

É característica a definição 5 do livro V dos *Elementos*, de Euclides:

> Diz-se que [quatro] grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e tomando quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos excedem, são iguais ou são menores que os últimos equimúltiplos tomados na ordem correspondente[39].

Isto significa, na nossa notação, que $a:b = c:d$ se $ma > nb$ implica $mc > nd$, $ma = nb$ implica $mc = nd$ e $ma < nb$ implica $mc < nd$, sendo m e n inteiros. Para uma tal definição tinha de ser estabelecido primeiro o chamado «axioma de Arquimedes», que nos *Elementos*, de Euclides, precede a definição anterior como definição 4:

> Diz-se que [duas] grandezas têm uma razão de uma para outra se cada uma puder, quando multiplicada, exceder a outra[40].

Esta definição podia ser mais propriamente chamada «axioma de Eudoxo». A teoria dos números irracionais actual, desenvolvida por Dedekind e Weierstrass, segue quase literalmente o modo de pensar de Eudoxo, mas com o uso dos métodos da aritmética moderna, que abriram perspectivas mais largas.

---

[39] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge, 1912, vol. 2, p. 114 (reedição de Dover, 1956).

[40] Id., *op. cit.*, ibid.









FRAGMENTO DE UMA PÁGINA DA 1.ª EDIÇÃO DOS *ELEMENTOS*, DE EUCLIDES, 1482

O «método de exaustão» (o termo «exaustão» aparece pela primeira vez em Grégoire de Saint-Vincent, em 1647) foi a resposta da escola platónica a Zenão. Evitava as dificuldades dos infinitesimais renunciando simplesmente a eles, pela redução dos problemas que conduzem a infinitesimais a problemas que envolviam somente o uso da lógica formal. Por exemplo, quando era exigido provar que o volume V do tetraedro era igual a um terço do volume P de um prisma com a mesma base e altura, a prova consistia em demonstrar que ambas as suposições $V > {}^1/_3P$ e $V < {}^1/_3P$ conduziam a absurdos. Com este objectivo foi introduzido um axioma equivalente ao axioma de Arquimedes (ou de Eudoxo) e que Arquimedes formulou como segue: de duas grandezas desiguais, «a maior excede a menor por uma grandeza tal que a operação de adição com ela própria pode ser feita de modo a exceder qualquer grandeza dada entre as que são comparáveis com ela e com aquelas»[41]. Aqui, a operação de «adição a si própria» pode ser repetida um número de vezes qualquer. No caso do tetraedro, o raciocínio era então o de que a hipótese $V = A$, $A > {}^1/_3P$ é absurda, encerrando o tetraedro numa pirâmide em escada circunscrita, formada de n prismas, cada um com a altura h/n, sendo h a altura do tetraedro, e então mostrava-se que, escolhendo n suficientemente grande, o volume da pirâmide ficaria menor que A. Como este volume é certamente maior que V, chegaríamos a um absurdo. De uma forma semelhante se demonstraria o absurdo de $V > {}^1/_3P$ por meio de uma pirâmide em escada inscrita. Euclides prova deste modo várias proposições, como, por exemplo, o teorema que afirma que dois círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros.

Este método indirecto, que se tornou o modelo grego e do Renascimento nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, era muito rigoroso e pode ser facilmente traduzido numa prova que satisfaça as exigências da análise moderna. Tinha a

---

[41] Arquimedes, *Sobre a Esfera e o Cilindro*, liv. 1, hipótese 5. Ver T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. 4.

grande desvantagem de o resultado, para ser provado, precisar de ser conhecido antes.

Existem indicações claras de que um outro método era na realidade utilizado. Possuímos uma carta de Arquimedes a Eratóstenes (*c.* 250 a. C.), que não tinha sido descoberta até 1906, na qual Arquimedes descrevia um método fértil, mas não rigoroso, para encontrar resultados. Esta carta é conhecida por «Método». S. Luria sugeriu que ela representava uma escola de raciocínio matemático que competia com a escola de Eudoxo, datando do período da «crise» e sendo associada ao nome de Demócrito, o fundador da teoria atomista. Na escola de Demócrito, de acordo com Luria, teria sido introduzida a noção de «átomo geométrico». Um segmento de recta, uma área ou um volume supunham-se constituídos por um grande, mas finito, número de «átomos» indivisíveis. O cálculo de um volume consistia na soma dos volumes dos «átomos» constituintes desse corpo. Esta teoria poderá parecer-nos absurda, até verificarmos que vários matemáticos anteriores a Newton, especialmente Kepler, utilizaram essencialmente as mesmas concepções, considerando a circunferência de um círculo decomposta num número muito grande de segmentos rectilíneos muito pequenos. Não existem provas de que alguma vez na antiguidade se tivesse desenvolvido um método rigoroso sobre esta fundamentação, mas o conceito moderno de limite permitiu fundamentar a teoria «atomista» de uma forma tão rigorosa como o «método de exaustão». Ainda hoje utilizamos regularmente estes conceitos de «átomos» para concretizar um problema matemático na teoria da elasticidade, em física ou em química, reservando a teoria rigorosa dos «limites» para o matemático profissional[42].

---

[42] «Deste modo, no que diz respeito aos primeiros diferenciais, uma pequena parte de uma curva situada perto de um ponto pode ser considerada recta e uma parte de uma superfície pode ser considerada plana; durante um curto espaço de tempo pode-se considerar que uma partícula se move a uma velocidade constante e que qualquer processo físico ocorre a um ritmo constante.» (H. B. Phillips, *Differential Equations*, Nova Iorque, 1922, p. 7.)

A vantagem do «método atomista» em relação ao «método da exaustão» consistia em facilitar a descoberta de novos resultados. Deste modo, a antiguidade podia escolher entre um método rigoroso, mas relativamente estéril, e um método menos fundamentado, mas de longe mais fértil. É significativo que em quase todos os textos clássicos fosse utilizado o primeiro método. Esta questão pode-se relacionar com o facto de a matemática se ter tornado um passatempo da classe ociosa, que se apoiava na escravatura, indiferente às invenções e interessada na contemplação. Pode ser também o reflexo da vitória do idealismo platónico em relação ao materialismo de Demócrito no domínio da filosofia matemática.

6

Em 334 a. C., Alexandre-o-Grande iniciava a conquista da Pérsia. Quando morreu, na Babilónia, em 323 a. C., todo o Próximo Oriente estava sob o domínio grego. As conquistas de Alexandre foram divididas pelos seus generais, emergindo posteriormente três impérios: o Egipto dos Ptolomeus; a Mesopotâmia e a Síria dos Selêucidas; e a Macedónia de Antígono e seus sucessores. Mesmo no vale do Indo havia príncipes gregos. Tinha começado o período do helenismo.

A consequência imediata das campanhas de Alexandre foi o avanço rápido da civilização grega pelas grandes regiões do mundo oriental. O Egipto, a Mesopotâmia e uma parte da Índia foram helenizadas. Os Gregos inundaram o Próximo Oriente de comerciantes, mercadores, médicos, aventureiros, viajantes e mercenários. As cidades — muitas delas foram fundadas novamente e podem ser reconhecidas pelo seu nome helenístico — estavam sob o controlo militar e administrativo dos Gregos e tinham uma população mista constituída por gregos e orientais. Mas o helenismo era essencialmente uma civilização urbana. O campo mantinha as suas características autóctones e continuava a sua existência do modo tradicional. Nas cidades, a

antiga cultura oriental encontrava-se com a civilização trazida da Grécia e em parte misturava-se com ela, embora tivesse existido sempre uma profunda separação entre os dois mundos. Os monarcas helenísticos adoptaram costumes orientais, pois tinham de tratar de problemas administrativos do Oriente; porém, estimularam as artes, as letras e as ciências gregas.

Deste modo, a matemática grega, levada para novos ambientes, conservou muitas das suas características tradicionais, mas também sentiu as influências dos problemas da administração e da astronomia que o Oriente tinha de resolver. Este contacto estreito entre a ciência grega e o Oriente foi extremamente fértil, especialmente durante os primeiros séculos. Praticamente todo o trabalho realmente produtivo que chamamos «matemática grega» foi realizado num período entre 350 e 200 a. C., de Eudoxo a Apolónio, apesar de os trabalhos de Eudoxo somente nos terem chegado através das interpretações de Euclides e Arquimedes. Também é relevante o facto de o maior progresso da matemática helenística ter ocorrido no Egipto dos Ptolomeus, e não na Mesopotâmia, apesar do estado mais avançado da matemática primitiva na Babilónia.

A razão deste desenvolvimento pode ser encontrada no facto de o Egipto ocupar, naquela época, uma posição central em relação ao mundo mediterrânico. Alexandria, a nova capital construída no litoral, tornou-se o centro intelectual e económico do mundo helenístico. A Babilónia apenas se conservava como um centro remoto das rotas das caravanas e desapareceu para ser substituída por Ctesifonte-Selêucide, a nova capital dos Selêucidas. Tanto quanto sabemos, nenhum grande matemático grego esteve alguma vez relacionado com a Babilónia. Antioquia e Pérgamo, também cidades do Império Selêucida, mas próximas do Mediterrâneo, possuíam escolas gregas importantes. O desenvolvimento da astronomia e da matemática na Babilónia atingiu o seu auge no período selêucida e a astronomia grega foi impulsionada; a importância deste facto só começou a ser melhor entendida agora. Além de Alexandria existiam outros

centros de estudo da matemática, especialmente Atenas e Siracusa. Atenas tornou-se um centro educacional, enquanto Siracusa produziu Arquimedes, o maior dos matemáticos gregos.

7

Neste período surgiram os cientistas profissionais, homens que dedicavam a sua vida à procura do conhecimento e que recebiam por isso um salário. Alguns dos representantes mais importantes deste grupo viviam em Alexandria, onde os Ptolomeus tinham construído um grande centro de estudo, no chamado Museu, com a sua famosa Biblioteca. Aqui, a herança grega em relação à ciência e à literatura foi preservada e desenvolvida. O sucesso desta empresa foi considerável. Entre os primeiros sábios associados a Alexandria destaca-se Euclides, um dos matemáticos mais influentes de todos os tempos.

Euclides, sobre cuja vida nada é verdadeiramente conhecido, distinguiu-se durante a época do primeiro Ptolomeu (306-283 a. C.), a quem se supõe ter observado que «não existe uma estrada real para a geometria». Os seus textos mais famosos e mais avançados são os treze livros que constituem os *Elementos (Stoicheia)*, embora também lhe sejam atribuídos outros textos menores. Entre estes textos encontra-se o *Data*, que contém o que chamaríamos aplicações da álgebra à geometria, sendo apresentados numa linguagem estritamente geométrica. Não sabemos quantos destes textos pertencem mesmo ao próprio Euclides e quantos são compilações; no entanto, revelam em muitas partes uma perspicácia surpreendente. São os primeiros textos inteiramente sobre matemática que foram conservados.

Os *Elementos* são, a seguir à Bíblia, provavelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental. Surgiram mais de um milhar de edições desde a invenção da imprensa e antes dessa época cópias manuscritas dominavam muito do ensino da geometria. A maior parte da geometria das nossas escolas era retirada, por vezes literalmente, de oito ou

nove dos treze livros; e a tradição euclidiana ainda pesa bastante na nossa instrução elementar. Para o matemático profissional, estes livros têm tido sempre um fascínio inelutável (se bem que os seus alunos muitas vezes os achem fastidiosos) e a sua estrutura lógica influenciou o pensamento científico talvez mais do que qualquer outro texto no mundo.

O tratamento de Euclides baseia-se numa dedução estritamente lógica de teoremas, de um conjunto de definições, postulados e axiomas. Os primeiros quatro livros tratam de geometria plana, mas não tratam da teoria das proporções, e, partindo das mais elementares propriedades de rectas e ângulos, conduzem à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao teorema de Pitágoras (livro I, proposição 47), à construção de um quadrado de área igual à de um rectângulo dado, à secção de ouro, ao círculo e aos polígonos regulares. O teorema de Pitágoras e a secção de ouro são introduzidos como propriedades de áreas. O quinto livro apresenta a teoria das proporções de Eudoxo na sua forma puramente geométrica e no sexto livro isto é aplicado à semelhança de figuras planas. Aqui voltamos ao teorema de Pitágoras e à secção de ouro (livro VI, proposições 31 e 30), mas agora como teoremas respeitantes a razões de grandezas. A introdução da semelhança tão tardiamente é uma das diferenças mais importantes entre a apresentação da geometria plana de Euclides e a actual e deve ser atribuída à ênfase de Euclides em relação à nova teoria dos incomensuráveis de Eudoxo. A discussão geométrica é resumida no décimo livro, muitas vezes considerado o mais difícil de Euclides e que contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas, portanto da forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Os últimos três livros relacionam-se com a geometria sólida e conduzem, pela via dos ângulos sólidos, aos volumes dos paralelepípedos, do prisma e da pirâmide à esfera e àquilo que parece ter sido considerado o clímace — a discussão dos cinco poliedros regulares («platónicos») e a prova de que existem somente estes cinco poliedros regulares.

Os livros VII-IX são dedicados à teoria dos números — não às técnicas de cálculo, mas a assuntos pitagóricos, tais como a divisibilidade de inteiros, a adição de séries geométricas e algumas propriedades dos números primos. Aí encontramos tanto o «algoritmo de Euclides», para achar o máximo divisor comum de um dado conjunto de números, como o «teorema de Euclides», segundo o qual existe uma infinidade de números primos (livro IX, proposição 20). É de particular interesse o teorema (livro VI, proposição 27) que contém o primeiro problema de máximo que chegou até nós, com a prova de que o quadrado é, de todos os rectângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima. O quinto postulado do livro I (a relação entre «axiomas e postulados» não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado «axioma das paralelas», de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta paralela a uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir este axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adoptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas. A rejeição do axioma de Arquimedes conduziu, de uma forma semelhante, às geometrias não arquimedianas.

O raciocínio algébrico em Euclides é expresso totalmente numa forma geométrica. A expressão $\sqrt{A}$ é introduzida como sendo o lado de um quadrado de área A e o produto ab como sendo a área de um rectângulo de lados a e b. As equações lineares e quadráticas são resolvidas por construções geométricas, conduzindo à chamada «aplicação de áreas». Este modo de expressão deve-se à teoria das proporções de Eudoxo, que conscientemente tinha rejeitado expressões numéricas para utilizar segmentos de recta e, desta maneira, operava com incomensuráveis num sentido puramente geométrico — a aritmética limitando-se apenas a «números» (inteiros) e às suas razões.

Qual era a intenção de Euclides ao escrever os *Elementos?* Podemos assumir com alguma certeza que ele pretendia reunir num texto três grandes descobertas do seu passado recente: a

teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão. Estas três descobertas eram, todas elas, tipicamente realizações gregas.

8

O maior matemático do período helenístico e de toda a antiguidade foi Arquimedes (287-212 a. C.), que viveu em Siracusa como conselheiro do rei Hierão. Ele é uma das poucas figuras científicas da antiguidade que são algo mais do que um nome; foram conservados vários dados acerca da sua vida e da sua personalidade. Sabemos que foi assassinado quando os Romanos tomaram Siracusa, depois de ter colocado a sua perícia técnica ao serviço dos defensores da cidade. O seu interesse em aplicações práticas deve ser considerado ímpar, se o compararmos ao desprezo a que tal interesse foi votado pela escola platónica dos seus contemporâneos; porém, é encontrada uma explicação na declaração muito citada de Plutarco em *Vita Marcelli* (XVII, 4):

> [...] embora estas invenções lhe tenham dado a reputação de uma sagacidade mais do que humana, ele não deixou qualquer trabalho escrito sobre tais assuntos, mas, considerando ignóbil e sórdida a arte da mecânica e toda a espécie de arte relacionada com a utilidade e o proveito, colocou toda a sua ambição nessas especulações, cuja beleza e requinte não estão corrompidos por nenhuma mistura com as necessidades comuns da vida.

Isto, porém, foi escrito por um platónico cerca de três séculos depois de Arquimedes. Os autores que viveram mais perto da sua época, tais como Políbio e Vitrúvio, não mencionaram esta angústia e viram em Arquimedes somente o grande mestre da mecânica.

As mais importantes contribuições de Arquimedes na matemática foram feitas no domínio daquilo a que agora chamamos «cálculo integral» — teoremas sobre áreas de figuras planas e sobre volumes de corpos sólidos. Na *Medição do Círculo* encon-

trou uma aproximação da circunferência do círculo pelo uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Levando esta aproximação a polígonos de 96 lados, encontrou (na nossa notação):

$$3\frac{10}{71} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2018\frac{7}{40}} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}$$ [43]

o que é usualmente expresso dizendo que π é aproximadamente igual a $3\frac{1}{7}$. No livro de Arquimedes *Sobre a Esfera e o Cilindro* encontramos a expressão para a área da esfera (apresentada como sendo quatro vezes a de um círculo máximo) e para o volume da esfera (2/3 do volume do cilindro circunscrito). A expressão de Arquimedes para a área de um segmento parabólico (4/3 da área de um triângulo inscrito com a mesma base que o segmento da parábola e cujo vértice é o ponto onde a tangente à parábola é paralela à base) é encontrada no seu livro *Quadratura da Parábola*. No livro *Sobre Espirais* encontra-se a «espiral de Arquimedes» juntamente com cálculos de áreas; no livro *Sobre Conóides e Esferóides* encontra-se o volume de certas quádricas de revolução. O nome de Arquimedes está também ligado com o seu teorema sobre a perda de peso de corpos submersos num líquido, que pode ser encontrado no seu livro *Sobre Corpos Flutuantes*, um tratado de hidrostática.

Em todos estes trabalhos, Arquimedes combinou uma originalidade de raciocínio surpreendente com uma mestria de técnica de cálculo e rigor nas demonstrações. É característico desse rigor o «axioma de Arquimedes» já citado (ver secção 5, atrás) e o uso correcto do método de exaustão para provar os resulta-

[43] $3{,}1409 < \pi < 3{,}1429$. A média aritmética dos limites superior e inferior dá $\pi = 3{,}1419$. O valor correcto é 3,14159... O símbolo π não foi usado na antiguidade no sentido actual (na antiga Grécia, π significava 80). Foi primeiro usado no sentido moderno por William Jones (1706), um amigo de Newton e pai do grande sanscritista, mas foi adoptado em geral depois de Euler o ter usado na sua *Introductio*, de 1748.

dos das suas integrações. Vimos como Arquimedes encontrou na realidade estes resultados de uma forma mais heurística (pela consideração de infinitesimais); mas ele publicou-os subsequentemente, de acordo com exigências mais estritas de rigor. Arquimedes diferia da maior parte dos matemáticos gregos pela sua capacidade de cálculo. Este facto deu ao seu trabalho, juntamente com todas as suas características gregas, um toque oriental. Isto é revelado no seu «problema do gado», um problema muito complicado de análise indeterminada e que pode ser interpretado como um problema que conduz a uma equação do tipo Pell:

$$t^2 - 4729494\,u^2 = 1$$

que é resolvida com números muito grandes.

Isto é apenas uma das muitas indicações de que a tradição platónica nunca dominou inteiramente a matemática helenística; a astronomia helenística segue na mesma direcção.

9

Com o terceiro grande matemático helenístico, Apolónio de Perga (*c.* 247-205 a. C.), encontramo-nos de novo inteiramente na geometria grega tradicional. Apolónio, que parece ter ensinado em Alexandria e Pérgamo, escreveu um tratado de oito livros sobre *Cónicas*, sete dos quais sobreviveram, três somente na tradução árabe. É um tratado sobre a elipse, a parábola e a hipérbole, introduzidas como secções de um cone circular, e vai até à discussão das evolutas de cónicas. Conhecemos estas cónicas pelos nomes encontrados em Apolónio; referem-se a certas propriedades das áreas dessas curvas, que são expressas na nossa notação pelas equações (notação homogénea, p, d são linhas em Apolónio)

$$y^2 = px; \; y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2$$

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

σονα ἢ ὃν ,γιγ L′ δ′ πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,εϡκδ L′ δ′ πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ′· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια′ πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αξ πρὸς ξϛ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ′· ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ϛ′ πρὸς ξϛ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ,βιϛ ϛ′ πρὸς ξϛ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ′ πρὸς ξϛ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ϛτλϛ πρὸς ,βιζ δ′, ἅπερ τῶν ,βιζ δ′ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′.

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα′ μείζων.

---

1 L′] Eutocius, γ′ AB(C). 3 ,εϡκδ] Eutocius, e corr. B, ,ετκδ ABC. L′] Eutocius, e corr. B, ε′ A, 3 B. 4 σμ] B²C, σν AB. ιγ′] B², ιγ′ α′ A(C); δ ιγ′ om. B. 5 ια′] B², om. AB(C). 7 ξϛ] C, e corr. B, σξϛ AB. 8 ἑκατέρας] B², εκατερα ABC. ια μ′· ἡ ΑΓ] B², *Wallis*, οιμαι AB, οιμ(·) C. πρὸς ΓΚ Eutocius. ΚΓ ἢ ὃν] B², *Wurmius*; (ΓΚ) . . (χε)ν C, καταγον A. ,αθ ϛ′] B²C, αοϛ A. 10 ΛΓ] *Wallis*, ΑΓ ABC; πρὸς ΛΓ Eutocius. 13 ,ϛτλϛ] Eutocius, B², *Wallis*, ,ϛτα ϛ′ ABC. 14 ,βιζ (pr.)] e corr. B, ζιζ AC. 15 οα′] B, corr. ex ο′ α′ C, ο′ α′ A. 16 ϟϛγώνου] C, ϟϛ πολυγωνου AB. 17 ι οα′] e corr. B, ὃν ο′ ια′ AB(C). 18 ι οα′] e corr. B, θ′ ια′ AC. 20 ἐλάσσονι] scripsi, ελασσων ABC. μείζονι—21 μείζων] scripsi,

DUAS PÁGINAS DE *ARCHIMEDES OPERA OMNIA* MOSTRANDO O CÁLCULO DE π
(J. L. Heiberg, ed., vol. 1, 1910. Esta não foi a forma como Arquimedes escreveu, pois na antiga Grécia só se usavam maiúsculas)

$$A\Gamma : \Gamma H < 3013\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4} : 780$$ [u. Eutocius].

secetur $\angle \Gamma A H$ in duas partes aequales recta $A\Theta$; propter eadem igitur erit $A\Theta : \Theta\Gamma < 5924\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} : 780$ [u. Eutocius] siue $< 1823 : 240$; altera[1]) enim alterius $\frac{4}{13}$ est [u. Eutocius]; quare $A\Gamma : \Gamma\Theta < 1838\frac{9}{11} : 240$ [u. Eutocius]. porro secetur $\angle \Theta A \Gamma$ in duas partes aequales recta KA; est igitur $AK : K\Gamma < 1007 : 66$ [u. Eutocius]; altera[1]) enim alterius est $\frac{11}{40}$; itaque

$$A\Gamma : \Gamma K < 1009\tfrac{1}{6} : 66$$ [u. Eutocius].

porro secetur $\angle KA\Gamma$ in duas partes aequales recta AA; erit igitur

$$AA : A\Gamma < 2016\tfrac{1}{6} : 66$$ [u. Eutocius],

et $A\Gamma : \Gamma A < 2017\frac{1}{4} : 66$ [u. Eutocius]. et e contrario ⟨$\Gamma A : A\Gamma > 66 : 2017\frac{1}{4}$ [Pappus VII, 49 p. 688]. sed ΓA latus est polygoni 96 latera habentis; quare⟩[2]) perimetrus polygoni ad diametrum maiorem rationem habet quam $6336 : 2017\frac{1}{4}$, quae maiora sunt quam triplo et $\frac{10}{71}$ maiora quam $2017\frac{1}{4}$; itaque etiam perimetrus polygoni inscripti 96 latera habentis maior est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maior diametro; quare etiam multo magis[3]) circulus maior est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maior diametro.

ergo ambitus circuli triplo maior est diametro et excedit spatio minore quam $\frac{1}{7}$, maiore autem quam $\frac{10}{71}$.

---

1) Exspectaueris ἑκάτερος (sc. ὅρος) γὰρ ἑκατέρου (ἑκάτερα γὰρ ἑκατέρων Wallis), sed genus femininum minus adcurate refertur ad auditum uerbum εὐθεῖα, quasi sit $A\Theta = 5924\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, $\Theta\Gamma = 780$.

2) Ueri simile est, Archimedem ipsum haec addidisse. similes omissiones durae inueniuntur p. 240, 4, 6; 242, 5, 8, nec dubito eas transscriptori tribuere, sicut etiam p. 240, 8 τὸ πολύγωνον pro ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, p. 242, 17 ὁ κύκλος pro ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου.

3) Quippe quae maior sit perimetro polygoni (De sph. et cyl. I p. 10, 1).

μειζων δε AC, maior B, autem quam decem septuagesimunis add. B². In fine: Αρχιμηδους κυκλου μετρησις A.

(o sinal mais corresponde à hipérbole e o sinal menos à elipse). Parábola significa aqui «aplicação»; elipse, «aplicação por defeito»; hipérbole, «aplicação por excesso». Apolónio não possuía o nosso método das coordenadas, porque não tinha notação algébrica (provavelmente rejeitou-a conscientemente sob a influência da escola de Eudoxo). Muitos dos seus resultados, porém, podem ser transcritos imediatamente em linguagem de coordenadas — incluindo a propriedade das evolutas, que é idêntica à equação cartesiana[44]. O mesmo pode ser dito de outras obras de Apolónio, algumas delas parcialmente conservadas, contendo geometria «algébrica» numa linguagem geométrica e portanto homogénea. Encontramos aí o *problema da tangência* de Apolónio, que consiste em construir círculos tangentes a três círculos dados; os círculos podem ser substituídos por linhas rectas ou pontos. Em Apolónio encontramos pela primeira vez, de uma forma explícita, o requisito de que as construções geométricas sejam limitadas apenas ao compasso e à régua; esta não era uma exigência geral dos Gregos, tal como se acreditou por vezes.

10

A matemática, através da história e até à actualidade, não pode ser separada da astronomia. As necessidades relacionadas com a irrigação e a agricultura em geral —e, num certo grau, também com a navegação— concederam à astronomia o primeiro lugar nas ciências helenística e oriental e o seu desenvolvimento determinou, e não em pequena extensão, o rumo da matemática. O conteúdo computacional e muitas vezes concep-

---

[44] «A minha tese, então, é que a essência da geometria analítica é o estudo dos *loci* através das suas equações, e isto era conhecido pelos Gregos, sendo a base dos seus estudos sobre secções cónicas.» J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods,* Oxford, 1940, p. 119. Ver, porém, as nossas observações sobre Descartes. As afirmações de Coolidge parecem-nos anti-históricas: a maneira de pensar matemática dos Gregos era diferente da nossa.

tual da matemática foi muito condicionado pela astronomia e o progresso da astronomia dependeu igualmente das potencialidades dos livros de matemática utilizáveis. A estrutura do sistema planetário é tal, que métodos matemáticos relativamente simples permitem resultados de grande alcance, mas são, ao mesmo tempo, suficientemente complicados para estimularem o aperfeiçoamento destes métodos e das próprias teorias astronómicas. O Oriente tinha feito avanços consideráveis no cálculo astronómico durante o período precisamente anterior à era helenística, especialmente na Mesopotâmia, durante os períodos finais assírio e persa. Aí, as observações realizadas durante um período longo permitiram uma notável compreensão de muitas efemérides. O movimento da Lua foi um dos problemas da astronomia mais desafiantes para o matemático, tanto na antiguidade como no século XVIII, e os astrónomos babilónicos (caldeus) dedicaram muito esforço ao seu estudo. O encontro entre a ciência grega e a ciência babilónica, durante o período selêucida, trouxe um grande avanço computacional e teórico e, enquanto a ciência babilónica continuou na antiga tradição dos calendários, a ciência grega produziu alguns dos mais significativos triunfos teóricos.

A mais antiga contribuição grega para a astronomia teórica foi a teoria planetária do mesmo Eudoxo, que tinha inspirado Euclides. Foi uma tentativa de explicar o movimento dos planetas (à volta da Terra), admitindo a sobreposição de quatro esferas concêntricas, cada uma com o seu próprio eixo de rotação com as extremidades fixas sobre a esfera envolvente. Era algo de novo, e tipicamente grego, uma explicação, e não uma crónica dos fenómenos celestes. Apesar da sua forma especial, a teoria de Eudoxo continha a ideia principal de todas as teorias planetárias até ao século XVII; consistia na explicação das irregularidades das órbitas aparentes da Lua e dos planetas pela sobreposição de movimentos circulares. É o que subjaz ainda, do ponto de vista dos processos de cálculo, nas teorias dinâmicas modernas, desde que se introduziram as séries de Fourier.

A Eudoxo seguiu-se Aristarco de Samos (*c.* 280 a. C.), o «Copérnico da antiguidade», a quem Arquimedes atribuiu a hipótese de o Sol, e não a Terra, ser o centro do movimento planetário. Esta hipótese encontrou poucos aderentes na antiguidade, embora a convicção de que a Terra se movia sobre o seu eixo tivesse grande aceitação. O pequeno sucesso da hipótese heliocêntrica foi principalmente devido à autoridade de Hiparco, muitas vezes considerado o maior astrónomo da antiguidade. Hiparco de Niceia fez observações entre os anos de 141 e 127 a. C. Pouco chegou até nós directamente do seu trabalho; a principal fonte do nosso conhecimento sobre os seus resultados foi Ptolomeu, que viveu três séculos mais tarde. Muitos dos assuntos contidos no maior trabalho de Ptolomeu, o *Almagesto*, podem ser atribuídos a Hiparco, especialmente a utilização de círculos excêntricos e de epiciclos para explicar o movimento do Sol, da Lua e dos planetas, assim como a descoberta da precessão dos equinócios. A Hiparco atribui-se também o método de determinação da latitude e da longitude por processos astronómicos, mas na antiguidade nunca houve uma organização científica capaz para fazer uma cartografia de larga escala (os cientistas estavam então dispersos, tanto no espaço como no tempo). Os trabalhos de Hiparco estavam muito relacionados com os da astronomia babilónica e podemos ver neles o mais importante fruto científico resultante do contacto entre os Gregos e o Oriente durante o período helenístico[45].

11

O terceiro e último período da sociedade antiga é o da dominação romana. Siracusa caiu nas mãos de Roma em 212, Cartago em 146, a Grécia em 146, a Mesopotâmia em 64 e o Egipto

---

[45] O. Neugebauer, *Exact Science in Antiquity*, Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conf., Studies in Civilization, Filadélfia, 1941, pp. 22-31; do mesmo autor, *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton, 1952: 2.ª ed., 1957; reed. de Dover, 1969.

em 30 a. C. Todo o Oriente dominado pelo Império Romano, incluindo a Grécia, foi inteiramente reduzido à condição de colónia governada por administradores romanos. Este controlo não afectava a estrutura económica dos países orientais, na medida em que pesados impostos e outros tributos fossem devidamente cobrados. O Império Romano dividiu-se naturalmente numa parte ocidental, cuja agricultura extensiva se equilibrava pelo grande mercado dos escravos, e numa parte oriental, cuja agricultura intensiva nunca utilizou escravos, excepto para tarefas domésticas e trabalhos públicos. Apesar do crescimento de algumas cidades e do comércio que abrangia todo o mundo ocidental conhecido, a estrutura económica do Império Romano permanecia baseada na agricultura. A expansão da economia de escravos em tal sociedade foi fatal para qualquer trabalho científico original. A classe dos donos de escravos raramente se interessava por descobertas técnicas, em parte porque os escravos podiam fazer todo o trabalho de uma forma barata e em parte porque receavam que qualquer instrumento nas mãos dos escravos estimulasse a sua inteligência. Contudo, havia também escravos ilustrados. Quem quisesse aprender seriamente filosofia e ciência aprendia grego. Muitos membros das classes dirigentes afloravam por vezes as artes e as ciências, mas este amadorismo promoveu essencialmente a mediocridade em relação ao pensamento produtivo. Com o declínio do mercado de escravos, a economia romana entrou em decadência e existiam poucos homens a fomentar uma ciência, mesmo medíocre.

Enquanto o Império Romano aparentava alguma estabilidade, a ciência oriental continuava a florescer, apresentando uma curiosa mistura de elementos helenísticos e orientais. Embora a originalidade e o estímulo tivessem desaparecido gradualmente, a *pax romana* durou muitos séculos, permitindo especulações imperturbáveis ao longo das linhas tradicionais. Coexistente, durante muitos séculos, com a *pax romana* foi a *pax sinensis;* em toda a sua história, o continente eurásico nunca conheceu um período de paz contínua, tal como no tempo dos

Antoninos, em Roma, e da dinastia Han, na China. Isto tornou mais fácil do que anteriormente a difusão do conhecimento pelo continente, de Roma e Atenas até à Mesopotâmia, à China e à Índia. A ciência helenística continuou a chegar ao Irão e à Índia e foi sucessivamente influenciada pela ciência desses países. O brilho da astronomia babilónica e da matemática grega chegou à Itália, à Espanha e à Gália — constitui um exemplo a expansão da divisão sexagesimal do ângulo e das horas no Império Romano. Existe uma teoria de F. Woepcke (1863) que remonta a expansão dos chamados numerais indo-árabes, através da Europa, às influências neopitagóricas no final do Império Romano. Esta expansão pode ou não ser verdadeira, mas, se esse facto data de há tanto tempo, é bem provável que ele se deva mais às influências do comércio do que às da filosofia.

Alexandria permaneceu o centro da matemática antiga. Continuou a produzir trabalhos originais, embora as compilações e os comentários se tornassem cada vez mais a forma de ciência predominante. Muitos resultados dos antigos matemáticos e astrónomos tinham sido transmitidos através dos trabalhos desses compiladores; e é algumas vezes muito difícil descobrir o que é que transcreveram e o que descobriram propriamente. Ao tentarmos compreender o declínio gradual da matemática grega, temos de ter também em consideração o seu lado técnico: o modo geométrico primitivo de expressão, juntamente com a rejeição firme da notação algébrica, tornaram quase impossível qualquer avanço para além das secções cónicas. A álgebra e o cálculo foram deixados aos desprezados orientais, cujo saber foi ocultado pelo brilho da civilização grega. É errado, porém, acreditar que a matemática de Alexandria era puramente «grega», no sentido euclidiano-platónico tradicional; a aritmética computacional e a álgebra do tipo egipto-babilónica foram desenvolvidas lado a lado com demonstrações geométricas abstractas. Basta pensarmos apenas em Ptolomeu, em Herão e em Diofanto para nos convencermos desse facto. A única ligação entre os vários povos e escolas foi o uso comum da língua grega.

Um dos primeiros matemáticos de Alexandria do período romano foi Nicómaco de Gerasa (*c.* 100 d. C.), cuja *Introdução à Aritmética* é a exposição mais completa existente da aritmética pitagórica. Relaciona-se em grande parte com os mesmos assuntos tratados nos livros de aritmética dos *Elementos,* de Euclides, mas, se Euclides representa números por linhas rectas, Nicómaco utiliza uma notação aritmética através de uma linguagem vulgar, quando são expressos números indeterminados. O seu tratamento acerca de números poligonais e piramidais influenciou a aritmética medieval, especialmente através de Boécio.

Um dos maiores documentos deste segundo período de Alexandria foi *A Grande Colecção,* de Ptolomeu, mais conhecido pelo seu título arabizado *Almagesto* (c. 150 d. C.). O *Almagesto* foi uma obra de astronomia de superior mestria e originalidade, ainda que muitas ideias possam ter vindo de Hiparco ou de Kidinnu e de outros astrónomos babilónicos. Também contém trigonometria, juntamente com uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos, por ordem crescente e em função da metade do ângulo; é equivalente a uma tabela de senos de acordo com a fórmula: corda $\alpha = 2R \text{ sen } \alpha/2$, onde $R = 60$. Ptolomeu descobriu para a corda de 1° o valor $(1, 2, 50) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + $ $+ \frac{50}{60^3} = 0{,}017453$; para π o valor $(3, 8, 30) = \frac{377}{120} = 3{,}14166$.

Encontramos no *Almagesto* a fórmula para o seno e coseno da soma e da diferença de dois ângulos, juntamente com um começo de trigonometria esférica. Os teoremas eram expressos na forma geométrica — a nossa notação trigonométrica actual data somente de Euler, do século XVIII. Encontramos também neste livro o «teorema de Ptolomeu» para um quadrilátero inscrito num círculo. No *Planisphaerium,* de Ptolomeu, encontra-se uma discussão sobre a projecção estereográfica; na sua *Geo-*

graphia, a posição dos lugares na Terra é determinada pela latitude e pela longitude, que são exemplos antigos de coordenadas sobre a esfera. A projecção estereográfica está na base da construção do astrolábio, um instrumento usado para a determinação da posição sobre a Terra, já conhecido na antiguidade e amplamente utilizado até à introdução do octante, mais tarde sextante, no século XVIII[46].

Um pouco mais velho do que Ptolomeu era Menelau (*c.* 100 d. C.), cuja obra *Sphaerica* continha uma geometria da esfera, juntamente com uma discussão sobre triângulos esféricos, um assunto que não é tratado em Euclides. Encontramos aí o «teorema de Menelau» para o triângulo generalizado à esfera. Enquanto a astronomia de Ptolomeu contém uma boa parte de trabalho de cálculo em fracções sexagesimais, o tratado de Menelau era geométrico na pura tradição euclidiana.

Ao período de Menelau pertence talvez Herão; de qualquer modo, sabemos que ele descreveu com precisão um eclipse lunar em 62 d. C.[47] Com o seu nome chegaram-nos numerosos livros sobre assuntos geométricos, computacionais e mecânicos; esses escritos revelam uma mistura curiosa das matemáticas gregas e orientais. Na sua obra *Metrica,* ele deriva a «fórmula de Herão», para a área de um triângulo[48]:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

numa forma puramente geométrica; a proposição tinha sido atribuída a Arquimedes. Na *Metrica* também encontramos as frac-

---

[46] H. Michel, *Traité de l'astrolabe,* Paris, 1947. Também O. Neugebauer, «The Early History of the Astrolabe», in *Isis,* vol. 40, 1949, pp. 240-56. Mais geral: Eva G. L. Taylor, *The Haven-finding Art,* 1956.

[47] O. Neugebauer, «Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria-Rom bei Heron», in *Hist. fil. Medd. Danshe Vid. Sels.,* vol. 26, n.° 2, 1938, 28 pp.

[48] *s* é o semiperímetro. *(N. do T.)*

ções unitárias tipicamente egípcias, tal como na aproximação de $\sqrt{63}$ através de

$$7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

A fórmula de Herão para o volume de um tronco de pirâmide quadrangular *(frustum)* pode ser facilmente reduzida a outra encontrada no antigo papiro de Moscovo. A sua medição do volume dos cinco poliedros regulares, por outro lado, inseria-se uma vez mais no espírito euclidiano.

13

A influência oriental é ainda mais forte na *Arithmetica,* de Diofanto (*c.* 250 d. C.). Apenas seis dos livros originais sobreviveram; o número total não passa de uma conjectura. O seu tratamento engenhoso das equações indeterminadas revela que a antiga álgebra da Babilónia ou talvez da Índia não só sobreviveu ao brilho da civilização grega, como também foi aperfeiçoada com a actividade de alguns homens. Não se sabe como e quando isto aconteceu, assim como também se desconhece quem era Diofanto — pode ter sido um babilónio helenizado. O seu livro é um dos tratados mais fascinantes da antiguidade greco-romana que foram conservados.

A colecção de problemas de Diofanto é de grande variedade e a sua solução é muitas vezes altamente engenhosa. A «análise diofantina» consiste em encontrar respostas para equações indeterminadas, do tipo

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$$

ou conjuntos destas equações. É característico de Diofanto o interessar-se somente por soluções racionais positivas; ele cha-

mou às soluções irracionais «impossíveis» e era cuidadoso ao seleccionar os seus coeficientes para obter a solução racional positiva que procurava. Entre as equações encontramos

$$x^2 - 26y^2 = 1$$

$$x^2 - 30y^2 = 1$$

agora conhecidas como equações de Pell. Diofanto também tem várias proposições na teoria dos números, tal como o teorema (III, 19) segundo o qual, dados dois inteiros que são a soma de dois quadrados, o seu produto pode resolver-se de duas maneiras como a soma de dois quadrados. Existem também teoremas sobre a decomposição de um número na soma de três ou quatro quadrados.

Em Diofanto encontramos a primeira utilização sistemática de símbolos algébricos. Possuía um sinal especial para a incógnita, para o sinal de menos e para os recíprocos. Os sinais são ainda do tipo abreviatura, mais do que símbolos algébricos no sentido actual (formam a chamada álgebra «sincopada»); para cada potência da incógnita existe um símbolo especial[49]. Não há dúvida de que temos aqui não só, como na Babilónia, questões aritméticas de uma natureza algébrica definida, mas também uma notação algébrica bem desenvolvida que conduziu à solução de problemas de maior complexidade, como nunca tinham sido postos anteriormente.

---

[49] O Papiro 620 da Universidade de Michigan, adquirido em 1921, contém alguns problemas de álgebra grega que datam de um período anterior a Diofanto, talvez do início do século II d. C. Alguns símbolos que se encontram nos trabalhos de Diofanto aparecem neste manuscrito. Ver F. E. Robbins, *Classical Philology*, vol. 24, 1929, pp. 321-329; K. Vogel *ibid.*, vol. 25, 1930, pp. 373-375. A distinção entre álgebra retórica (só palavras), álgebra sincopada e álgebra simbólica (a nossa actual) deve-se a G. H. F. Nesselman, *Die Algebra der Griechen*, Berlim, 1842.

O último dos grandes tratados de Alexandria foi escrito por Papo (inícios do século IV). A sua *Colecção (Synagoge)* era uma espécie de manual para o estudo da geometria grega juntamente com anotações históricas, aperfeiçoamentos e alterações de teoremas e demonstrações. Tinha de ser lida juntamente com os trabalhos originais, e não independentemente. Muitos resultados de autores antigos são apenas conhecidos na forma na qual Papo os conservou. São exemplos os problemas relacionados com a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo. É interessante o seu capítulo sobre figuras isoperimétricas, no qual encontramos o círculo com área maior do que qualquer polígono regular de perímetro igual. Aqui também é feita a observação de que os alvéolos de uma colmeia satisfazem certas propriedades de máximo e mínimo[50]. Os sólidos semi-regulares de Arquimedes também são conhecidos através de Papo. Tal como a *Arithmetica*, de Diofanto, a *Colecção* é um livro desafiante, cujos problemas mais tarde inspiraram a pesquisa.

A escola de Alexandria foi desaparecendo gradualmente com o declínio da sociedade antiga. Continuou a ser, como um todo, um baluarte do paganismo contra o progresso do cristianismo e vários dos seus matemáticos também deixaram marcas na história da filosofia antiga. Proclo (410-485), cujo *Comentário sobre o Primeiro Livro de Euclides* é uma das nossas principais fontes da história da matemática grega, dirigiu uma escola neoplatónica em Atenas. Outro representante desta escola, em Alexandria, foi Hypatia, que escreveu comentários sobre os matemáticos clássicos. Ela foi assassinada em 415 pelos seguidores

---

[50] Existe uma discussão completa sobre este problema em D'Arcy W. Thompson, *Growth and Form*, 2.ª ed., Cambridge, 1942. O nome de Zenodoro (século II a. C.) aparece relacionado com o estudo dos chamados problemas isoperimétricos. Este estudo perdeu-se, mas foi resumido por Papo. Comparar com Steiner (ver cap. VIII, sec. 9, adiante).

de São Cirilo, um destino que inspirou uma novela de Charles Kingsley[51]. Estas escolas filosóficas e os seus comentadores tiveram altos e baixos durante séculos. A Academia em Atenas foi interrompida por ser considerada «pagã» pelo imperador Justiniano (529), mas por esta altura existiam novamente escolas em lugares como Constantinopla e Jundīshāpūr. Muitos códices antigos sobreviveram em Constantinopla, enquanto os comentadores continuaram a perpetuar a memória da ciência grega e da filosofia na língua grega. Em 630, Alexandria foi tomada pelos Árabes, que substituíram a superstrutura da civilização grega por uma superstrutura árabe. Não há razão para acreditar que os Árabes tivessem destruído a famosa Biblioteca de Alexandria, até porque é duvidoso que a Biblioteca ainda existisse nessa altura[52]. Na realidade, as conquistas árabes não mudaram materialmente o carácter dos estudos matemáticos no Egipto. Pode ter havido um retrocesso, mas, quando ouvimos falar novamente da matemática egípcia, é ainda seguindo a antiga tradição greco-oriental (por exemplo, Alhazen).

15

Acabamos este capítulo com algumas observações sobre a aritmética e a logística gregas. Os matemáticos gregos fizeram uma distinção entre «aritmética», ou ciência dos números, *(arithmoi)*, e «logística», ou cálculo prático. O termo *arithmos* exprimia somente um número natural, uma «quantidade composta de unidades» (Euclides, liv. VII, definição 2; isto significa também que «um» não era considerado um número)[53]. A nossa

---

[51] C. Kingsley, *Hypatia*, 1853. Também F. Mauthner, *Hypatia* 1892, em alemão.

[52] E. A. Parrons (*The Alexandrian Library. Glory of the Hellenistic World*, Amsterdão, etc., 1952) sustenta o oposto.

[53] Assim foi até ao Renascimento. Stevin, na sua *Arithmétique*, de 1585, defende apaixonadamente o reconhecimento do «um» como um número, tal como os outros inteiros.

concepção de número real era desconhecida. Um segmento de recta, por isso, nem sempre tinha um comprimento. O raciocínio geométrico substituía o nosso trabalho com números reais. Quando Euclides queria expressar que a área de um triângulo é igual a metade da base vezes a altura, tinha de dizer que é metade da área de um paralelogramo com a mesma base e situado entre as mesmas paralelas (Euclides, I, 41). O teorema de Pitágoras era uma relação entre as áreas de três quadrados, e não entre os comprimentos dos três lados. Os *Elementos,* de Euclides, têm uma teoria de equações quadráticas, mas que era expressa em termos das chamadas aplicações de áreas, e, visto que as raízes eram segmentos de recta obtidos pela execução de determinadas construções indicadas, podemos dizer que as únicas raízes admitidas eram positivas. Porém, nos *Elementos,* um segmento de recta não tem necessariamente um valor numérico ligado a ele. Estes conceitos de rectas e números devem ser considerados um acto deliberado trazido pela vitória do idealismo platónico nas camadas das classes dirigentes gregas, interessadas na matemática; mas as concepções contemporâneas no Oriente respeitantes à relação entre a álgebra e a geometria não admitiam nenhuma restrição do conceito de número. Existem razões para acreditar que, para os Babilónios, o teorema de Pitágoras era uma relação numérica entre os comprimentos dos lados, e foi este tipo de matemática que os matemáticos jónios conheceram.

O cálculo matemático vulgar conhecido por «logística» permaneceu muito vivo durante todos os períodos da história grega. Euclides rejeitou-o, mas Arquimedes e Herão utilizaram-no com facilidade e sem hesitações. Na realidade, baseava-se num sistema de numeração que mudou com o tempo. O mais antigo método grego de numeração estava baseado num princípio aditivo decimal, tal como o dos Egípcios e dos Romanos. Nos tempos de Alexandria, ou talvez antes, apareceu um método de escrita de números que foi utilizado durante quinze séculos, não só por cientistas, mas também por mercadores e administrado-

res. Usavam os sucessivos símbolos do alfabeto grego para exprimir, primeiro, os nossos símbolos 1, 2, ..., 9, depois, as dezenas de 10 a 90 e, finalmente, as centenas de 100 a 900 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, etc.). Três letras arcaicas extra eram acrescentadas às vinte e quatro letras do alfabeto grego, para que se obtivessem os vinte e sete símbolos necessários. Com a ajuda deste sistema, qualquer número menor do que 1000 podia ser escrito com três símbolos no máximo — por exemplo, 14 como $\iota\delta$, pois $\iota = 10$ $\delta = 4$; números maiores do que 1000 podiam expressar-se por uma simples extensão deste sistema. Este sistema é usado nos manuscritos existentes de Arquimedes, de Herão e de todos os outros autores clássicos. Existem testemunhos arqueológicos de que era ensinado nas escolas.

Era um sistema decimal não posicional; tanto $\iota\delta$ como $\delta\iota$ podiam significar 14, mas apenas 14. A ausência do valor de posição e a utilização de vinte e sete símbolos no mínimo têm sido interpretadas como provas da inferioridade do sistema. A facilidade com que os antigos matemáticos o utilizaram, a sua aceitação pelos mercadores gregos, mesmo em transacções complicadas, e a sua longa persistência —no Império Romano do Oriente até ao seu final, em 1453— parecem apontar para algumas vantagens. Um pouco de prática com este sistema pode convencer-nos de que é possível operar facilmente com as quatro operações elementares, uma vez que o significado dos símbolos esteja bem dominado. O cálculo fraccionário através de uma notação própria também é simples; mas os Gregos eram pouco consistentes devido à falta de um sistema uniforme. Usaram as fracções unitárias egípcias, as fracções sexagesimais da Babilónia e também as fracções numa notação que faz pensar na nossa. As fracções decimais nunca foram introduzidas, mas este importante melhoramento dá-se apenas mais tarde, no Renascimento europeu, depois de o aparelho computacional ter sido estendido muito para além da utilização que tivera na antiguidade; mesmo assim, as fracções decimais não foram adoptadas em muitos livros de estudo senão nos séculos XVIII e XIX.

Tem sido argumentado que este sistema alfabético foi prejudicial ao desenvolvimento da álgebra grega, porque o uso de letras para números definidos impediu a sua utlização para representar os números em geral, tal como fazemos na nossa álgebra actual. Esta explicação sobre a ausência de uma álgebra grega anterior a Diofanto deve ser rejeitada, mesmo que aceitemos a grande importância de uma notação apropriada. Se os autores clássicos estivessem interessados na álgebra, teriam criado um simbolismo apropriado, o qual Diofanto tinha na realidade começado a criar. O problema da álgebra grega só pode ser elucidado através de estudos futuros sobre as relações entre os matemáticos gregos e a álgebra babilónica no conjunto das conexões entre a Grécia e o Oriente.

BIBLIOGRAFIA

Os autores clássicos gregos são acessíveis através de excelentes textos que existem em traduções inglesas. A melhor introdução é dada nos seguintes livros:

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics,* 2 vols., Cambridge, 1921; reedição de Dover, 1981.

—, *A Manual of Greek Mathematics,* Oxford, 1931.

—, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 3 vols., Cambridge, 1908; reedição de Dover, 1956.

Ver Becke, P., *Œuvres complètes d'Archimède,* Bruxelas, 1921.

—, *Pappus d'Alexandrie. La Collection mathématique,* Paris-Bruges, 1933.

—, *Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide,* Bruges, 1948.

Scriba, C., *Archimedes.*

Dijksterhuis, E. J., *Archimedes,* Copenhaga, 1956.

Manitius, K., *Ptolemäus Handbuch der Astronomie,* 2.ª ed., O. Neugebauer (ed.), 2 vols., Leipzig, 1963 (1.ª ed., Leipzig, 1912-13).

Pedersen, O., *A Survey of the Almagest,* Copenhaga, 1974.

[Toomer, G. J., ed.] *Diocles on Burning Mirrors,* Berlim, etc., 1976.

Bashmakova, I. G., *Diophantus und diophantische Gleichungen,* 1972 (do russo). Ver também *Istor.-mat. Issled,* vol. 17, 1966, pp. 185-204.

Loria, G., *Le Scienze esatte nell'antica Grecia,* 2.ª ed., Milão, 1914.

Allman, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid,* Dublim, 1889.

Gow, J., *A Short History of Greek Mathematics,* Cambridge, 1884.
Reidemeister, K., *Die Arithmetik der Griechen,* Hamburg Math. Seminar Einzelschriften 26, 1939.
—, *Das exakte Denken der Griechen,* Hamburgo, 1949.
Cohen, M. R., e Drabkin, I. E., *A Source Book in Greek Science,* Londres, 1948.
Heath, T. L., *Mathematics in Aristotle,* Oxford, 1949.
van der Waerden, B. L., *Ontwakende Wetenschap,* Groninga, 1950. Trad. inglesa, *Science Awakening,* Oxford, 1961. (Trata das matemáticas egípcia, babilónica e grega.)
Becker, O., *Das mathematische Denken der Antike,* Gotinga, 1957.
Hauser, G., *Geometrie der Griechen von Thales bis Euclid,* Lucerna, 1955.
Blaschke, W., *Grieschische und anschauliche Geometrie,* Munique, 1953.
Dantzig, T., *The Bequest of the Greeks,* Nova Iorque, 1955.
Kolman, F., *History of Mathematics in Antiquity,* Moscovo, 1961 (em russo).
Wussing, H., *Mathematik in der Antike,* Leipzig, 1965. (Os livros de Kolman e Wussing também tratam das matemáticas egípcia e babilónica.)
Steele, A. D., «Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik», in *Quellen und Studien,* vol. A2, 1932, pp. 61-89.

Textos gregos, latinos e ingleses comparados:

Thomas, I., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics,* Cambridge, Mass., e Londres, 1939.

Textos críticos suplementares:

Tannery, P., *Pour l'histoire de la science hellène,* 2.ª ed., Paris, 1930.
—, *Mémoires scientifiques,* vols. 1-4, Toulouse e Paris, 1912-20.
Vogt, H., «Die Entedeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4ten Jahrhunderts», in *Bibliotheca mathematica,* vol. 3, n.º 10, 1909-10, pp. 97-105.
Sachs, E., *Die fünf Platonischen Körper,* Berlim, 1917.
Hellen, S., «Die Entdeckung der stetigen Teilun durch die Pythagoreen», in *Abh. Deut. Akad. Wiss., Kl. f. Math. u. Physik u. Techn.,* n.º 6, 1958.
Frank, E., *Plato und die sogenannten Pythagoreer,* Halle, 1923.
Apostle, H. O., *Aristotle's Philosophy of Mathematics,* Chicago, 1952.
Luria, S., «Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten», in *Quellen und Studien,* vol. B2, 1932, pp. 106-185.
Lorenzen, P., *Die Entstchung der exakten Wissenschaften,* Berlim, 1960.
Szabo, A., *The Beginnings of Greek Mathematics,* Dordrecht, 1978. (Trad. do alemão, Munique e Viena, 1969.) Ver também *HM,* vol. 1, 1974, pp. 291-316.
Knorr, W. R., «Archimedes and the Pre-Euclidean Proportion Theory», in *Arch. intern. hist. sc.,* vol. 28, 1978, pp. 183-244.

É dada uma visão interessante das várias hipóteses que se relacionam com a matemática grega em:

Dijksterhuis, E., *De elementen van Euclides*, 2 vols., Groninga, 1930 (em holandês).

Ver também o artigo em *DSB* sobre Euclides, assim como:

van der Waerden, B. L., *Die Pytagoreër. Religiöse Brüderschaft und Schule der Wissenschaft*, Zurique e Munique, 1979.
Lexikon der Antiken Welt, Estugarda, 1965. Contém artigos sobre matemática por K. von Fritz, H. Guericke e K. Vogel.

Sobre a matemática bizantina ver:

Vogel, K., «Der Anteil von Byzanz an Erhaltung und Weiterverbreitung der griechischen Mathematik», in *Miscellanea mediaevalea Ia*, Berlim, 1962, pp. 112-128. (Ver *Istor.-mat. Issled.*, vol. 10, 1973, pp. 249-63.)

CAPÍTULO IV

O Oriente depois do declínio da sociedade grega

1

A antiga civilização do Próximo Oriente nunca desapareceu, apesar de todas as influências helenísticas. Ambas as influências grega e oriental aparecem claramente na ciência de Alexandria; Constantinopla e a Índia eram também importantes locais de encontro do Oriente com o Ocidente. Em 394, Teodósio I fundou o Império Bizantino; a capital, Constantinopla, era grega, mas o centro de administração de vastos territórios, onde os Gregos constituíam somente uma parte da população urbana. Durante um milhar de anos, este império lutou contra forças vindas do leste, do norte e do oeste, servindo ao mesmo tempo de guardião da cultura grega e de ponte entre o Oriente e o Ocidente. A Mesopotâmia tornou-se independente dos Romanos e dos Gregos no século II d. C., primeiro sob o domínio dos reis dos Partos, mais tarde (266) sob o domínio da dinastia persa dos Sassânidas. A região do Indo teve, durante alguns séculos, várias dinastias gregas, que desapareceram por volta do século I d. C.; no entanto, os reinos indianos autóctones que lhes sucederam mantiveram relações culturais com a Pérsia e com o Ocidente.

A hegemonia política dos Gregos no próximo Oriente desapareceu quase inteiramente com o súbito crescimento do Islão.

Depois de 622, o ano da Hégira, os Árabes conquistaram rapidamente várias regiões da Ásia ocidental e antes do final do século VIII tinham ocupado regiões do Império Romano do Ocidente, tal como a Sicília, o Norte de África e a Espanha. Onde quer que chegassem, tentavam substituir a civilização greco-romana pela do Islão. O árabe tornou-se a língua oficial, em vez do grego e do latim; mas a circunstância de uma nova linguagem ter sido usada nos documentos científicos ofuscou o facto de, sob o domínio dos Árabes, uma considerável continuidade cultural ter permanecido. As antigas civilizações autóctenes tiveram mais possibilidades de sobreviver sob este domínio do que sob o domínio alheio dos Gregos. A Pérsia, por exemplo, conservou muito da antiga sociedade sassânida, apesar da administração árabe. Porém, continuou o confronto entre as diferentes tradições, mas agora de uma forma nova. Através de todo o período da dominação islâmica, existiu uma tradição grega bem definida, que se manteve contra as diferentes culturas autóctones.

2

Vimos que os resultados matemáticos mais gloriosos desta competição e da mistura entre o Oriente e a cultura grega, durante o apogeu do Império Romano, surgiram no Egipto. Com o declínio do Império Romano, o centro de investigação matemática começou a deslocar-se para a Índia e mais tarde voltou à Mesopotâmia. As primeiras contribuições indianas bem conservadas para as ciências exactas são os *Siddhāntās,* dos quais o *Sūraya* se pode assemelhar, na forma, ao original (300-400 d. C.). Estes livros relacionam-se essencialmente com a astronomia e operam com epiciclos e fracções sexagesimais. Estes factos sugerem a influência da astronomia grega, talvez transmitida num período anterior ao *Almagesto*; também podem indicar um contacto directo com a astronomia babilónica. Além disso, os *Siddhāntās* revelam muitas características genuinamente

indianas. O *Sūrya Siddhāntā* tem tabelas de senos (*jyā*) em vez de cordas. Este seno é metade de uma corda, pelo que é um segmento de recta.

Os resultados dos *Siddhāntās* foram explicados sistematicamente e desenvolvidos por escolas de matemática indianas, centralizadas essencialmente em Ujjain (Índia central) e Mysore (Sul da Índia). Foram conservados os nomes e os livros dos matemáticos indianos a partir do século V d. C.; alguns livros são utilizáveis em traduções inglesas.

Os mais conhecidos destes matemáticos são Āryabhata (chamado «o primeiro», *c.* 500 d. C.) e Brahmagupta (625). A questão da sua dependência em relação à Grécia, à Babilónia e à China é um assunto discutível; no entanto, eles revelam ao mesmo tempo uma originalidade considerável. O que é característico nos seus trabalhos é a parte aritmético-algébrica, que mostra a sua tendência para as equações indeterminadas e, deste modo, alguma afinidade com Diofanto. Estes escritores foram, nos séculos seguintes, seguidos por outros que trabalharam no mesmo campo; os seus trabalhos eram em parte astronómicos e em parte aritmético-algébricos e faziam incursões na medição e na trigonometria. Āryabhata I tinha para π o valor 3,1416. Um assunto favorito era a procura de triângulos e quadriláteros racionais, nos quais Mahāvirā, da escola de Mysore (850), foi particularmente prolífico. Por volta de 1150 encontramos em Ujjain, onde Brahmagrupta tinha trabalhado, um outro matemático excelente, Bhāskara. A primeira solução geral de equações indeterminadas do primeiro grau $ax + by = c$ (em que a, b e c são inteiros) é encontrada em Brahmagrupta. Por isso, falando rigorosamente, é incorrecto chamar equações diofantinas às equações lineares indeterminadas. Onde Diofanto aceitou soluções fraccionárias, os Hindus admitiam somente soluções inteiras. Também ultrapassaram Diofanto ao admitirem raízes negativas das equações, embora isto possa ter sido uma prática antiga, sugerida pela astronomia babilónica. Bhāskara, por exemplo, resolveu a equação $x^2 - 45x = 250$, encontrando

as soluções $x = 50$ e $x = -5$; ele manifestou algum cepticismo no que diz respeito à validade da raiz negativa. O seu *Līlāvati* foi durante muitos séculos um trabalho-modelo sobre aritmética e medição no Oriente; o imperador Akbar traduziu-o para persa (1587) e uma edição inglesa de 1817 foi reeditada em 1827, em Calcutá. A edição original, em sânscrito, foi vários vezes reeditada: existe uma com comentários em sânscrito e hindi (Benares, 1961)[54]. A antiga Índia produziu ainda mais tesouros matemáticos; sabemos hoje, por exemplo, que a série de Gregory-Leibniz para $\pi/4$ foi encontrada num manuscrito sânscrito, atribuído a Nilakantha (1500)[55].

3

Na matemática hindu, a realização mais conhecida é o nosso actual sistema de posição decimal. O sistema decimal é muito antigo, tal como o sistema de posição; a sua combinação surge na China e depois na Índia, onde se impôs gradualmente em relação aos antigos sistemas não posicionais. A sua primeira ocorrência na Índia encontra-se num prato do ano 595, onde a data 346 é escrita na notação do sistema decimal de posição. Os Hindus, muito antes destes registos epigráficos, tinham um sistema para expressar números grandes através de palavras

---

[54] Brahmagupta afirma algures no seu livro que alguns dos seus problemas foram propostos «simplesmente por prazer». Esta afirmação confirma que as matemáticas no Oriente tinham há muito deixado a sua função utilitária. Cento e cinquenta anos depois, Alcuíno, no Ocidente, escrevia *Problemas para o Desenvolvimento da Mente dos Jovens,* exprimindo um objectivo não utilitário semelhante. As matemáticas, na forma de um *puzzle* intelectual, contribuíram muitas vezes para o progresso da ciência, abrindo novos campos. Alguns *puzzles* ainda esperam a sua integração no corpo central da matemática.

[55] C. T. Rajagopal e T. V. Vedaminthi Aiyar, *Scripta math.*, vol. 17, 1951, pp. 65-74; *ibid.*, vol. 18, 1952, pp. 25-30. Ver também C. T. Rajagopal e A. Venkatamaran, *J. Roy. Asiatic Soc. Bengali*, vol. 15, n.° 1, 1949, pp. 1-13; e J. E. Holmann, *Math. Phys. Seminar Ber. (Giessen),* vol. 3, 1953, pp. 193-206.

agrupadas de acordo com o método do valor de posição. Existem textos anteriores nos quais a palavra *śūnya*, significando «zero», é utilizada explicitamente[56]. O chamado «manuscrito de Bakshāli», consistindo em setenta folhas feitas de casca de vidoeiro e de origem e data incertas (as datações vão do século III ao século XII d. C.), com material tradicional hindu sobre equações indeterminadas e quadráticas, assim como aproximações, tinha um ponto para representar o zero. O registo epigráfico mais antigo contendo um sinal para o zero data do século IX, sendo muito mais tardio que a ocorrência de um sinal para o zero nos textos babilónicos. O sinal 0 para representar zero pode ser devido à influência grega (*ouden* = «nada» em grego); enquanto o ponto babilónico aparece entre dígitos, o zero indiano aparece também no final, de forma que 0, 1, 2, ..., 9 se tornaram dígitos equivalentes[57].

O sistema decimal, provavelmente originário da China, penetrou lentamente ao longo dos caminhos das caravanas, em muitas regiões do Próximo Oriente, tomando o seu lugar junto de outros sistemas. A penetração na Pérsia, talvez também no Egipto, pode muito bem ter acontecido no período sassânida (224-641), quando o contacto entre a Pérsia, o Egipto e a Índia era estreito. Neste período, a memória do antigo sistema de valor de posição da Babilónia podia ainda estar viva na Mesopotâmia. A referência mais antiga, fora da Índia, ao sistema de valor de posição dos Hindus encontra-se num trabalho de 662, escrito por Severus Sēbōkht, um bispo sírio. Com a tradução árabe dos *Siddhāntās* por Al-Fazārī (*c.* 773), o mundo científico islâmico começou a familiarizar-se com o chamado sistema hindu. Este sistema começou a ser utilizado cada vez mais no mundo árabe e para além dele, embora o sistema de numeração grego tam-

---

[56] Isto pode ser comparado ao uso do conceito de «vazio» *(kenos)* na *Física*, IV, de Aristóteles, 8.215[b]. Ver também C. B. Boyer, «Zero: the Symbol, the Concept, the Number», in *Nat. Math. Mag.*, vol. 18, 1944, pp. 323-330.

[57] Cf. H. Freudenthal, *5000 jaren internationale wetenschap*, Groninga, 1946.

bém permanecesse em uso, tal como outros sistemas autóctones. Os factores sociais podem ter desempenhado um certo papel — a tradição oriental favorecendo o método do valor de posição decimal contra o método dos Gregos. Os símbolos usados para representar os numerais com valor de posição revelam grandes variações, existindo dois tipos principais: os símbolos hindus usados pelos Árabes do Oriente e os chamados numerais *ġobâr* (ou *ghubar*), usados em Espanha pelos Árabes do Ocidente. Os primeiros símbolos ainda são usados no mundo árabe, mas o sistema de numeração actual parece ser derivado do sistema *ġobâr*. Segundo uma teoria de Woepcke (ver cap. 3, séc. 11, atrás), os numerais *ġobâr* eram utilizados em Espanha quando os Árabes chegaram, tendo atingido o Ocidente através dos neopitagóricos de Alexandria, no ano de 450 d. C.[5]

4

A Mesopotâmia, que, sob o domínio helenístico e romano, se tinha tornado um posto avançado do Império Romano, reconquistou a sua posição central ao longo das rotas comerciais sob o domínio dos Sassânidas, que reinaram como reis persas na Pérsia, na tradição de Ciro e Xerxes. Sabe-se pouco acerca deste período da história persa, especialmente acerca da sua ciência, mas a história lendária —tal como se reflectiu nas *Mil e Uma Noites*, Omar Khayyam, Firdawsī— confirma os pobres registos históricos do período sassânida; tratar-se-ia de uma era de esplendor cultural. Situada entre Constantinopla, Alexandria, Índia e China, a Pérsia sassânida era uma região onde muitas culturas se encontravam. A Babilónia tinha desaparecido, mas

[58] Cf. S. Gandz, «The Origin of the Ghubār Numerals», in *Isis*, vol. 16, 1931, pp. 393-424. Existe também uma teoria de N. Bubnov que sustenta que as formas *ġobâr* eram derivadas dos antigos símbolos greco-romanos usados no ábaco. Ver também a nota de roda-pé em F. Cajori, *History of Mathematics*, Nova Iorque, 1938, p. 90, assim como D. E. Smith e L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals*, Boston, 1911, p. 71.

foi substituída por Selêucida-Ctesifonte, que deu origem a Bagdade, depois da conquista árabe, em 641. Esta conquista não afectou grandemente a antiga Pérsia, embora os Árabes tivessem substituído o *pehlevi* como língua oficial. O próprio islamismo só foi aceite de uma forma modificada (shī'ismo); cristãos, judeus e zoroastreus continuaram a contribuir para a vida cultural do califado de Bagdade.

A matemática do período islâmico revela a mesma mistura de influências que se tornaram familiares para nós em Alexandria e na Índia[59]. Os califas Abássidas, nomeadamente Al-Mansūr (754-775), Hārūn al-Rashīd (766-809) e Al-Ma'mūn (813-833), promoveram a astronomia e a matemática e Al-Ma'mūn organizou em Bagdade a «Casa da Sabedoria», com uma biblioteca e um observatório. As actividades islâmicas nas ciências exactas, que começaram com a tradução dos *Siddāntās* por Al-Fāzārī, atingiram a maior importância com um homem natural de Khiva, Muhammad ibn Mūsā Al-Khwārizmī, cerca do ano de 825, Muhammad escreveu vários livros sobre matemática e astronomia. A sua aritmética explicava o sistema de numeração hindu. Embora se tenha perdido o original árabe, existe uma tradução latina do século XII. Este livro foi um dos meios pelos quais a Europa ocidental tomou conhecimento do sistema decimal. O título da tradução, *Algorithmi de numero Indorum*, acrescentou o termo *algorithmus* —uma latinização do nome do autor— à nossa linguagem matemática. Qualquer coisa de semelhante aconteceu à álgebra de Muhammad, que tinha o título de *Hisāb al-jabr wal-mugābala* (literalmente, «ciência da redução e da confrontação», que significa, provavelmente, «ciência das equações»). Esta álgebra, cujo texto árabe existe, também se tornou conhecida no Ocidente através de

---

[59] Durante muito tempo, os estudos sobre matemáticas orientais foram prejudicados pelo facto de existir pouco material traduzido. A situação tem melhorado gradualmente, embora algumas contribuições importantes só estejam disponíveis em russo.

traduções latinas e fez que a palavra *al-jabr* se tornasse sinónima de toda a ciência da «álgebra», que, de facto, até meados do século XIX, não era mais do que a ciência das equações.

Esta «álgebra» contém uma discussão sobre equações lineares e quadráticas, mas sem qualquer formalismo algébrico. Até mesmo o simbolismo «sincopado» de Diofanto está ausente. Entre estas equações existem os três tipos caracterizados por $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$, $3x + 4 = x^2$, que tinham de ser tratados separadamente, pois os coeficientes positivos eram os únicos admitidos. Estes três tipos reaparecem frequentemente em textos posteriores — «assim, a equação $x^2 + 10x = 39$ corre como um fio de ouro através da álgebra durante muitos séculos», escreve o Prof. Karpinski[60]. Muito do raciocínio é geométrico. As tabelas trigonométricas e astronómicas de Muhammad (com senos e tangentes) também pertencem aos trabalhos árabes que mais tarde foram traduzidos em latim. A sua geometria é um simples catálogo de regras de medição; isto é importante porque pode ter sido directamente tirado de um texto judaico do ano 150 a. C. Ela mostra uma falta de simpatia pela tradição euclidiana. A astronomia de Al-Khwārizmī era um resumo dos Siddhantās revelando de maneira indirecta alguma influência grega através do texto sânscrito. A obra de Al-Khwārizmi parece indicar mais influências orientais do que gregas[61], o que pode ter sido deliberado.

O trabalho de Al-Khwārizmī desempenha um papel importante na história da matemática, porque é uma das principais fontes pelas quais os numerais indianos e a álgebra árabe chegaram à Europa ocidental. A álgebra, até meados do século XIX, revelou a sua origem oriental pela ausência de um fundamento

---

[60] L. C. Karpinski, *Robert of Cherter's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwārismi*, Nova Iorque, 1915, p. 19.

[61] S. Gandz, «The Sources of Al-Khwārismī Algebra», in *Osiris*, vol. 1, 1936, pp. 263-277.

axiomático; a este respeito é nitidamente contrastante com a geometria euclidiana. A álgebra e a geometria de hoje ainda conservam estas marcas das suas diferentes origens.

5

A tradição grega foi cultivada por uma escola de sábios árabes[62] que traduziu fielmente os clássicos gregos para árabe — Apolónio, Arquimedes, Euclides, Ptolomeu e outros. A aceitação generalizada do nome *Almagesto* para a *Grande Colecção*, de Ptolomeu, revela a influência das tradições árabes no Ocidente. Estas cópias e traduções conservaram muitos clássicos gregos que, de outra forma, se teriam perdido. Havia uma tendência natural para salientar o lado computacional e prático da matemática grega à custa do seu lado teórico. A astronomia árabe estava particularmente interessada na trigonometria — a palavra *sinus*[63] é a tradução para o latim da grafia árabe do sânscrito *jyā*. O seno corresponde a metade da corda do arco duplo (Ptolomeu considerava a corda inteira) e era concebido como linha, e não como número. Encontramos uma boa relação de trigonometria nos trabalhos de Al-Battānni (Albategnius, *c*. 850-929), um dos maiores astrónomos árabes, que tinha uma tabela de cotangentes *(umbra extensa)*, assim como a regra dos cosenos para os triângulos esféricos.

Estes trabalhos de Al-Battānī revelam que os escritores árabes não se limitaram a copiar, mas também contribuíram com novos resultados, através do seu domínio dos métodos gregos e orien-

---

[62] Quando dizemos «sábios árabes» ou «ciência árabe», não quer dizer que estas ciências fossem somente cultivadas pelos Árabes. Pelo contrário, a maior parte dos «sábios árabes» eram persas, tadjiks, egípcios, judeus, mouros, etc. Da mesma forma, podemos chamar a muitos escritores europeus, desde Boécio a Gauss, «sábios latinos», porque escreveram em latim. O árabe era a *língua franca* do mundo islâmico, tal como o latim no Ocidente e o grego no mundo cristão oriental.

[63] Em português «seno». *(N. do T.)*

tais. Abū-l-Wafā (al-Būzjanī, 940-997/8) derivou o teorema dos senos da trigonometria esférica, calculou tabelas de senos para intervalos de 15', cujos valores eram calculados com oito decimais exactos, introduziu equivalentes da secante e da cosecante e fez construções geométricas usando um compasso de abertura fixa. Continuou também o estudo grego das equações cúbicas e biquadráticas. Al-Karkhī (ou Al-Karajī; morreu *c.* 1029), que escreveu uma álgebra elaborada, seguindo Diofanto, tinha material interessante sobre irracionais, tal como as fórmulas $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$, $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$. Revelou uma tendência bem definida a favor dos Gregos; a sua «negligência em relação à matemática hindu foi tal que deve ter sido sistemática»[64].

6

Não precisamos de seguir as numerosas transformações políticas e etnológicas no mundo islâmico. Elas trouxeram altos e baixos para o desenvolvimento da astronomia e da matemática; certos centros desapareceram, outros floresceram durante algum tempo; mas o carácter geral do tipo de ciência islâmica permaneceu praticamente inalterado. Mencionaremos apenas alguns aspectos mais relevantes.

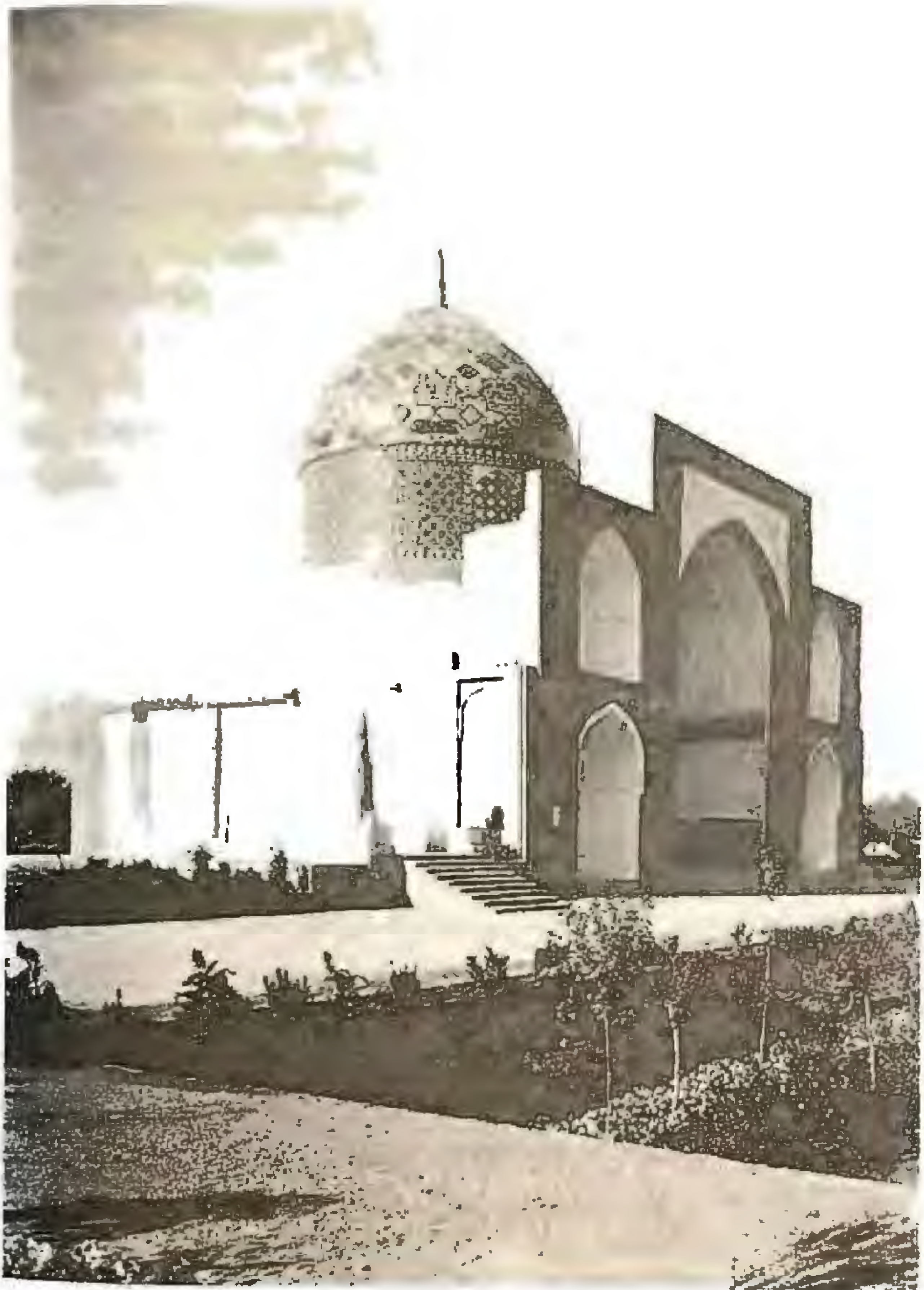
Cerca do ano 1000 d. C. surgiram novos governantes no Norte da Pérsia, os Turcos Seldjúcidas (Saljūq), cujo império floresceu à volta do centro de irrigação de Merv. Aqui viveu Omar Khayyam (ou al-Khayyāmī, *c.* 1038/48-1123/24), conhecido no Ocidente como o autor do *Rubaiyat* (na versão livre de Fitzgerald, 1859); era um astrónomo e um filósofo (no espírito de Aristóteles):

Ah, mas os meus Cálculos, diz o Povo,
Ajustaram o Ano ao Compasso humano, eh?
Se assim é, foi calculando do Calendário
O Ontem desaparecido e o Amanhã novo.

(LIX)

---

[64] G. Sarton, *Introduction to the History of Science*, Baltimore, 1927, vol. I, p. 719.



TÚMULO DE OMAR KHAYYAM, EM NISHAPUR
(Por cortesia do Museu Metropolitano de Arte)

Aqui, Omar pode ter-se referido à sua reforma do antigo calendário persa, que deu um erro de um dia em 5000 anos (1540 ou 3770 anos, de acordo com várias interpretações), enquanto o nosso actual calendário gregoriano tem um erro de um dia em 3330 anos. A sua reforma foi introduzida em 1079, mas foi substituída mais tarde pelo calendário lunar islâmico. Omar escreveu uma *Álgebra*[65] que constituiu um trabalho notável, pois continha uma investigação sistemática de equações cúbicas. Empregando um método usado ocasionalmente pelos Gregos, determinou as raízes dessas equações como a intersecção de duas secções cónicas. Não tinha soluções numéricas e fazia a discriminação —também no estilo grego— entre soluções «geométricas» e «aritméticas», existindo apenas as últimas se as raízes fossem racionais positivas. Esta abordagem era, por isso, inteiramente diferente da do século XVI, dos matemáticos bolonheses, que usavam métodos puramente algébricos.

Omar, noutro livro relacionado com as dificuldades de Euclides, substituiu o axioma das paralelas por um conjunto de novas proposições. Chegou às figuras que são agora associadas às chamadas «hipóteses dos ângulos obtuso, agudo e recto», que actualmente têm lugar na geometria não euclidiana. Também substituiu a teoria das proposições de Euclides por uma teoria numérica, na qual abordou a teoria dos irracionais e o conceito de número real em geral[66].

Depois da pilhagem de Bagdade pelos Mongóis, em 1258, surgiu rapidamente um novo centro de estudo, no mesmo lugar, no Observatório de Maragha, construído pelo chefe mongol Hulagu, para Nasīr al-dīn, em Tūsī (Nasir-eddin, 1201-74). Surgiu assim, novamente, uma instituição onde toda a ciência orien-

[65] *Risala fī'l-barāhīn' alā masā'il al-jabr wa'l muqābala (Tratado sobre a Demonstração de Problemas de Redução e Confrontação* [significando problemas de equações). Ver *DSB*, vol. 7, 1973, p. 327.

[66] D. J. Struik, «Omar Khayyam, Mathematician», in *Mathematics Teacher*, vol. 51, 1958, pp. 260-285.

tal podia ser reunida e comparada à ciência grega. Nasīr considerou a trigonometria uma ciência especial, separada da astronomia; as suas tentativas para «provar» o axioma das paralelas de Euclides, seguindo passos de Omar Khayyam, revelam como ele apreciava a perspectiva teórica dos Gregos. A influência de Naṣīr foi amplamente sentida mais tarde na Europa do Renascimento; em 1651 e 1663, John Wallis utilizou o trabalho de Naṣīr sobre o postulado euclidiano. Naṣīr também continuou a tradição de Omar na sua teoria das razões e no novo ponto de vista numérico com que se encaravam os números irracionais.

Outro matemático persa, Jemshid Al-Kāshī (1436), revelou uma grande versatilidade em trabalhos numéricos, comparável à que mais tarde, nos finais do século XVI, os Europeus atingiriam. Resolveu equações cúbicas por iteração e por métodos trigonométricos e conhecia o método, que hoje em dia é associado ao nome de Horner, para a solução de equações algébricas gerais de grau elevado, que generaliza a extracção de raízes de grau elevado dos números ordinários — um método que parece apontar para uma influência chinesa. No seu trabalho encontramos a fórmula binomial para expoentes inteiros positivos[67]. Além das fracções sexagesimais, usa fracções decimais com facilidade (por exemplo, 25,07 vezes 14,3 é 357,501) e calcula π com 16 decimais[68]. Tudo isto parece indicar que a matemática chinesa da dinastia Song (Sung) tinha penetrado profundamente no mundo islâmico (ver secção 7, a seguir).

Ibn Al-Haitham (Alhazen, *c.* 965-1039) foi uma figura importante no Egipto, o maior físico do Islão, cuja *Óptica* teve uma grande influência no Ocidente. Resolveu o «problema de Alhazen», no qual se pede que desenhemos, a partir de dois pontos sobre o plano de um círculo, rectas que se encontrem num ponto

---

[67] Cf. M. Yadagari, «The Binomial Theorem: A Widespread Concept in Medieval Islamic Tradition», in *HM*, vol. 7, 1980, pp. 401-406.

[68] Já encontramos fracções decimais num livro de Al-Vglīdisī, que o escreveu em Damasco, entre 952 e 953. Ver «Bibliografia», adiante.

da circunferência e façam ângulos iguais com a normal nesse ponto. Este problema leva a uma equação biquadrática que era resolvida pela maneira grega, através da intersecção de um círculo com uma hipérbole. Alhazen também utilizou o método de exaustão para calcular volumes de figuras pela rotação da parábola em volta de qualquer diâmetro ou ordenada. Cem anos antes de Alhazen viveu no Egipto o algebrista Abū Kāmil, que seguiu e desenvolveu o trabalho de Al-Khwarizmī. Influenciou não só Al-Karkhi, mas também Leonardo de Pisa.

Existia outro centro de estudos em Espanha. Um dos mais importantes astrónomos de Córdova era Al-Zarqāli (Arzaquiel, *c.* 1029-87), o melhor observador do seu tempo e editor das chamadas tabelas planetárias de Toledo. As tabelas trigonométricas deste trabalho, que foram traduzidas em latim, tiveram certa influência no desenvolvimento da trigonometria no Renascimento. As tabelas de Toledo foram seguidas pelas tabelas afonsinas (chamadas segundo o nome de Afonso X de Castela, século XIII), que se impuseram durante muitos séculos.

7

No que diz respeito às matemáticas chinesas, seria errado considerá-las um fenómeno isolado, tal como as matemáticas dos Maias. Existiram sempre, pelo menos desde o período Han (contemporâneo do Império Romano), relações comerciais e culturais consideráveis com outras regiões da Ásia e mesmo com a Europa. A ciência indiana e, mais tarde, a ciência árabe tiveram influência sobre a China e, por outro lado, a ciência chinesa deixou a sua marca na ciência de outras sociedades. Pensamos, por exemplo, no sistema decimal e nos números negativos, que podem ter vindo da China para a Índia. A influência indiana na China pode ser tão antiga como a introdução do budismo na China (século I d. C.). Porém, a influência grega parece pequena e não é evidente, apesar de alguns desenvolvimentos paralelos.

Os estudos sobre a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, que são característicos do período posterior à dinastia Han, parecem ter sido realizados independentemente dos trabalhos de Arquimedes. Liu Hui, autor de um comentário extenso sobre os *Nove Capítulos* (263 d. C.), descobriu, através de polígonos regulares inscritos e circunscritos, que $3,1401<\pi<3,1427$ e dois séculos mais tarde encontramos, com Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-chih; 430-501) e o seu filho, não somente o valor de π com sete decimais, mas também os valores $\pi = \frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ [69]

Durante a dinastia Tang (ou T'ang, 618-906) foi reunida uma colecção dos livros de matemática mais importantes para uso oficial nos exames imperiais. Foi neste período que começou a imprensa, embora os primeiros livros de matemática impressos de que temos conhecimento datem de 1084 e de mais tarde. Em 1115 apareceu uma edição impressa dos *Nove Capítulos*.

Num livro escrito por Wang Xiaotong (Wang Hsiao-t'ung) por volta de 625 encontramos uma equação cúbica mais complicada que a equação $x^3 = a$ dos *Nove Capítulos*. Mas o período de maior desenvolvimento da matemática chinesa foi o da dinastia Song (ou Sung, 960-1279) e os primeiros anos da dinastia mongol de Yuan (o «grão-cã» do famoso Marco Polo). Entre as figuras principais encontramos Qin Jiushao (Ch'in Chiu-shao), cujo livro data de 1247 e que desenvolveu a teoria das equações indeterminadas, teoria que fora gradualmente desenvolvida através dos séculos. Um dos exemplos considerados pode escrever-se:

$$x = 32 \text{ (mod 83)} \equiv 70 \text{ (mod 110)} \equiv \text{(30 mod 135)}$$

---

[69] $\pi = \frac{355}{113}$ pode obter-se dos valores de Ptolomeu e Arquimedes: $= \frac{355}{113} = \frac{377-22}{120-7}$. Este valor, que aparece como uma fracção parcial quando π, escrito em decimais, se desenvolve em fracção contínua, é por vezes referido como o «valor de Metius», segundo o burgomestre de Alkmaar e o engenheiro militar Adriaen Anthoniszoon (*c.* 1580), cujos filhos aliás se intitularam Metius.

Qin também tratou de soluções numéricas de equações de grau elevado, como, por exemplo,

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

Ele resolveu essas equações generalizando o método das aproximações sucessivas, já utilizado nos *Nove Capítulos* para a extracção de raízes quadradas e cúbicas. Neste método reconhecem-se agora as mesmas operações conhecidas nos nossos livros graças a W. G. Horner, que, desconhecendo aparentemente que tinha descoberto um método típico da matemática chinesa de há mil anos, o publicou em 1819.

Outro matemático do período Sung é Yang Hui, que trabalhou com fracções decimais e as escreveu de uma forma que nos recorda os nossos métodos actuais (livro de 1261). Um dos seus problemas conduz a $24{,}68 \times 36{,}56 = 902{,}3108$. Yang Hui apresentou-nos a primeira representação existente do triângulo de Pascal[70], que encontramos mais uma vez num livro de cerca de 1303, escrito por Zhu Shijie (Chu Shih-chieh). Zhu, considerado o mais importante deste grupo de matemáticos, dá nos seus livros a explicação mais completa do método aritmético-algébrico-computacional chinês. Ele estendeu mesmo as soluções «matriciais» das equações lineares algébricas a equações de grau superior em várias incógnitas, com métodos que nos recordam Sylvester, do século XIX.

No período posterior à dinastia Song, a actividade matemática continuou, mas não atingiu novas alturas. Falando de uma maneira geral, podemos dizer que, na sua habilidade para tratar de problemas aritméticos e algébricos complicados, os matemáticos chineses não só são comparáveis aos seus colegas indianos e aos que escreveram em árabe, como por vezes lhes serviram

---

[70] L. Y. Lam, «The Chinese Connection between the Pascal Triangle and the Solution of Numerical Equations of Any Degree», in *HM*, vol. 7, 1980, pp. 407-424.

de mestres. Por exemplo, o método de Horner e os trabalhos com fracções decimais podem ser encontrados mais tarde nos livros de Al-Kāshī de Samarcanda (ver secção 6, atrás)[71].

BIBLIOGRAFIA

O leitor poderá recorrer à bibliografia referida no capítulo II como suplemento aos títulos seguintes:

Juschkewitsch (Juškevic), A. P., *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig, 1964. (Original em russo, Moscovo, 1961)

[Vogel, K.] *Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern*, Aalen, 1963. (Ver S. Gandz em *Quellen und Studien*, vol. 2A, 1932, pp. 61-85.)

Suter, H., *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke*, Leipzig, 1900 (supl., 1902). (Ver também H. P. J. Renaud, *Isis*, vol. 18, 1932, p. 126).

Kasir, D. S., *The Algebra of Omar Khayyam*, Nova Iorque, 1931, p. 126.

Khayyam, Omar, *Traktaty*, Moscovo, 1961 (em russo). (Trad. por B. A. Rozenfel'd, com reproduções fotográficas dos textos árabes.)

Sobre Khayyam ver também:

Amir-Moéz, A. R., em *Scripta math.* vol. 26, 1963, pp. 323-337; também em *Istor.-mat. Issled.*, vol. 15, 1963, pp. 445-472 e 769-772.

Youschkevitch (Juškevič), A. P., *Les mathématiciens arabes (VIIIe-XVe siècle)*, Paris, 1976. Baseado no texto do autor em russo; ver atrás.

Rashad, R., «Résolution des équations numériques et algèbre: Sarafal Dinal-Tusi, Viète», in *AHES*, vol. 12, 1974, pp. 244-290.

Al-Kāshi, J., *The Key to Arithmetic, Treatise on the Circle,* Moscovo, 1956 (em russo). (Trad. por B. A. Rozenfel'd.)

Luckey, P., *Die Rechenkunst bei Ǧamšid b. Mas'ūd al-Kāšī*, Wiesbaden, 1951. Também em *Abh. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Klasse für Math. 1950*, n.º 6, 1953.

---

[71] Nos séculos XVI e XVII, os matemáticos chineses e japoneses estiveram em contacto com a Europa. A matemática e a astronomia ocidentais foram introduzidas na china pelo P.^e Mateo Ricci, que viveu em Pequim desde 1583 até à sua morte, em 1610. Ver H. Bosmans, «L' œuvre scientifique de Mathieu Ricci S. J.», in *Revue des Questions Scient.*, 3.ª série, vol. 29, Janeiro de 1921, pp. 135-151.

—, «Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik», in *Math. Annalen*, vol. 20, 1948, pp. 217-274.
Juschhewitsch (Juškevič), A. P., e Rozenfel'd, B. A., «Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter», in *Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft*, Berlim, 1960, pp. 62-160.
Saidan, A. S., *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī*, Dordrecht, 1978.
Hankel, H., *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874. (Este livro, o primeiro a dar uma introdução moderna às matemáticas árabes, foi reeditado por J. E. Hofmann, Hildersheim, 1965.)
Wang, Ling, e Needham, J., «Horner's Method in Chinese Mathematics», in *T'oung Pao*, Leida, vol. 43, 1955, pp. 345-401.
Datta, B., *The Science of the Sulba, a Study in Early Hindu Geometry*, Londres, 1932.
Smith, D. E., e Karpinski, L. C., *The Hindu-Arabic Numerals*, Boston, 1911.
Karpinski, L. C., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwārizmī*, Nova Iorque, 1915.
Hayashi, T., «A Brief History of the Japanese Mathematics», in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2.ª série, vol. 6, 1904-05, pp. 296-361.
Smith, D. E., «Unsettled Questions Concerning the Mathematics of China», in *Scientific Monthly*, vol. 33, 1931, pp. 244-250.
Lam, L. Y., *A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa: a Thirteenth Century Chinese Mathematical Treatise*, Singapura, 1977. (Cf. J. Needham, *HM*, vol. 6, 1979, pp. 466-468).
Colebrooke, H. T., *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhāscara*, Londres, 1817, 2.ª ed. (revista por H. C. Banerji), Calcutá, 1927.
Srinivasiengar, C. N., *The History of Ancient Indian Mathematics*, Calcutá, 1967.
Kūshyār ibn Labbān, *Principles of Hindu Reckoning*, trad. e ed. por M. Levey e M. Petruck, Madison, Wis., 1965.
Pingree, D., *History of Mathematical Astronomy in India*, *DSB*, vol. 15, supl. 1, 1978, pp. 533-633. (Pelo mesmo autor, ver os artigos em *DSB* sobre os antigos matemáticos indianos, tal como Aryabhata.)
Clark, W. E., *The Aryabhatya of Aryabhata*, Chicago, 1930.

CAPÍTULO V

Os começos na Europa ocidental

1

A parte mais desenvolvida do Império Romano, tanto económica como culturalmente, sempre foi a oriental. A parte ocidental nunca se baseou numa economia de irrigação; a sua agricultura era extensiva, facto que não estimulava o estudo da astronomia. Na realidade, para o Ocidente chegava muito bem um mínimo de astronomia, alguma aritmética e algumas medições para o comércio e para a agrimensura; mas o estímulo para desenvolver estas ciências veio do Oriente. Quando o Oriente e o Ocidente se separaram politicamente, o estímulo quase desapareceu. A civilização estática do Império Romano do Ocidente continuou durante muitos séculos, com poucas alterações e variações. A unidade mediterrânica da civilização antiga também permaneceu inalterável —e não foi muito afectada— pelas conquistas dos Bárbaros. Em todos os reinos germânicos, excepto talvez na Grã-Bretanha, as condições económicas, as instituições sociais e a vida intelectual permaneceram fundamentalmente aquilo que tinham sido durante o declínio do Império Romano. A base da vida económica era a agricultura e os escravos eram gradualmente substituídos por rendeiros e agricultores livres; mas, além disso, existiam cidades prósperas e comércio

de grande escala com uma economia monetária. A autoridade central no mundo greco-romano, depois da queda do Império do Ocidente, em 476, foi partilhada pelo imperador de Constantinopla e pelos papas de Roma. A igreja católica do Ocidente, através das suas instituições e linguagem, continuou da melhor forma possível a tradição cultural do Império Romano nos reinos germânicos. Mosteiros e homens laicos cultos mantiveram viva parte da civilização greco-romana.

Um desses laicos, o diplomata e filósofo Anicius Mautius Severinus Boetius (Boécio), escreveu textos matemáticos que foram fonte de autoridade no mundo ocidental durante mais de um milhar de anos. Estes textos reflectem as condições culturais, porque são muito pobres em conteúdo e a sua própria sobrevivência pode ter sido influenciada pela crença de que o autor morrera, em 524, como mártir da fé católica. A sua *Institutio arithmetica*, uma tradução superficial de Nicómaco, compreendia parte da teoria dos números pitagóricos que se integrava no ensino medieval, no quadro das sete *artes liberales,* consistindo no *trivium* (gramática, retórica e dialéctica) e no *quadrivium* (aritmética, geometria, astronomia e música).

É difícil estabelecer o período, no Ocidente, em que a economia do antigo Império Romano desapareceu para dar lugar à nova ordem feudal. Podem ser encontradas algumas luzes sobre esta questão nas hipóteses de H. Pirenne[72], de acordo com as quais o fim do antigo mundo ocidental chegou com a expansão do Islão. Os Árabes desapossaram o Império Bizantino de todas as suas províncias na costa oriental e no Sul do Mediterrâneo e fizeram do Mediterrâneo Oriental um lago muçulmano. Dificultaram as relações comerciais entre o Próximo Oriente e o Ocidente cristão durante vários séculos. As ligações intelec-

[72] H. Pirenne, *Mahomet et Charlemagne*, Paris, 1937; tradução inglesa, Nova Iorque, 1939. A tese foi atacada, especialmente por A. Doepsch. A transição, sustenta-se, teria sido antes devida a condições internas. Ver A. F. Havighurst, *The Pirenne Tesis*, Boston, 1958.

tuais entre o mundo árabe e as regiões do Norte do antigo Império Romano foram difíceis durante séculos.

Então, na Gália dos Francos e noutras regiões do antigo Império Romano, a economia de grande escala desapareceu e a decadência atingiu as cidades; os rendimentos provenientes das pastagens tornaram-se insignificantes. A economia monetária foi substituída pela troca de géneros e pelos mercados locais. A Europa ocidental, em suma, foi reduzida ao estado de uma semibarbárie. A aristocracia terratenente ganhou importância com o declínio do comércio; os senhores feudais francos do Norte, chefiados pelos carolíngios, tornaram-se o poder dominante no reino dos Francos. O centro económico e cultural deslocou-se para o Norte de França e para a Grã-Bretanha. A separação entre o Ocidente e o Oriente limitou a autoridade efectiva do papa, levando o papado a aliar-se com os carolíngios, mudança que é simbolizada pela coroação de Carlos Magno como imperador do Sacro Império, em 800. A sociedade ocidental tornou-se feudal e eclesiástica e a sua orientação tornou-se germânica e nórdica. Este facto quebrou a tradição estática herdada do Império Romano nos seus últimos séculos. O novo tipo de arreios para cavalos e a introdução do estribo são apenas alguns exemplos desta ruptura. Quando as cidades se desenvolveram, a classe burguesa estava pronta para receber este espírito inventivo.

2

Durante os primeiros séculos do feudalismo ocidental encontramos pouco interesse pelas matemáticas, mesmo nos mosteiros. Na novamente primitiva sociedade agrícola deste pequeno período, os factores estimulantes da matemática, mesmo de carácter mais prático, não existiam; e as matemáticas monacais não eram mais do que certa aritmética eclesiástica usada principalmente para o cálculo do calendário da Páscoa (o chamado *computus*). Boécio era a maior fonte de autoridade. De alguma

importância entre estes matemáticos eclesiásticos era o britânico de nascimento Alcuíno, associado à corte de Carlos Magno, cujos *Problemas para Estimular o Espírito dos Jovens* (ver cap. IV, séc. 3, atrás) continham uma selecção que influenciou os escritores de textos durante muitos séculos. Muitos destes problemas remontam ao antigo Oriente. Por exemplo:

> Um cão tenta caçar um coelho, que tem um avanço de cento e cinquenta passos. O cão avança nove passos cada vez que o coelho salta sete. Em quantos saltos o cão atingirá o coelho?

> Um lobo, uma cabra e uma couve têm de atravessar um rio num barco que transporta um de cada vez, incluindo o remador. Como é que o remador os levará para o outro lado de forma que a cabra não coma a couve e o lobo não coma a cabra?

Outro matemático eclesiástico foi Gerbert, um monge francês que em 999 se tornou o papa Silvestre II. Escreveu alguns tratados no espírito de Boécio e teve um papel activo no despertar de interesse pela matemática em toda a Europa ocidental. Um ábaco com um quadro de vinte sete colunas foi atribuído a Gerbert ou à sua influência. Uma estada na Catalunha em 968 pode ter contribuído para interessar o mundo latino no estudo da ciência árabe.

3

Existem diferenças significativas entre o desenvolvimento do Ocidente, anteriormente grego, e o feudalismo oriental. O carácter extensivo da agricultura do Ocidente tornou supérfluo um grande sistema de administradores burocráticos, pelo que não se proporcionou uma base para um eventual despotismo oriental. Não havia possibilidade de obter no Ocidente grandes fornecimentos de escravos. Quando as aldeias, na Europa ocidental, cresceram e se tornaram burgos, estes burgos desenvolveram-se como unidades independentes, nas quais os burgueses foram incapazes de estabelecer uma vida de ócio baseada na escrava-

tura. Esta é uma das principais razões pelas quais o desenvolvimento da *polis* grega e o da cidade ocidental, que durante as primeiras fases tiveram muito em comum, se afastaram nitidamente mais tarde. Os habitantes das cidades medievais tinham de confiar no próprio génio inventivo para desenvolver os seus padrões de vida. Travando uma luta amarga contra os senhores feudais —com vários conflitos civis—, venceram nos séculos XII, XIII e XIV. Este triunfo baseava-se não só numa rápida expansão do comércio e da economia monetária, mas também no desenvolvimento gradual da tecnologia. Os príncipes feudais apoiaram muitas vezes as cidades na sua luta contra os senhores e, posteriormente, alargaram o seu domínio às cidades. Este facto conduziu finalmente à emergência dos primeiros estados nacionais na Europa ocidental.

As cidades começaram a estabelecer relações comerciais com o Oriente, que ainda era o centro da civilização. Algumas vezes, estas relações eram estabelecidas de uma forma pacífica, outras vezes por meio da violência, como aconteceu em muitas cruzadas. As primeiras a estabelecer relações mercantis foram as cidades italianas; seguiram-se as cidades da França e da Europa central. Os sábios seguiram ou, algumas vezes, precederam os mercadores e os soldados. A Espanha e a Sicília eram os pontos de contacto mais próximos entre o Oriente e o Ocidente e, através deles, os mercadores ocidentais e os estudantes conheceram a civilização islâmica. Quando, em 1085, Toledo foi tomada aos Mouros pelos cristãos, os estudiosos ocidentais afluíram a esta cidade para aprender a ciência tal como era transmitida em árabe. Muitas vezes empregaram intérpretes judeus para conversas e traduzir, e, assim, encontramos no século XII, em Espanha, Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester traduzindo manuscritos matemáticos do árabe para o latim. Deste modo, a Europa familiarizou-se com os clássicos gregos através da língua árabe; e, por esta altura, a Europa ocidental estava suficientemente desenvolvida para apreciar este saber.

Constantinopla (agora Istambul) era um outro centro de estudo; desde 395 e durante mais de mil anos foi a capital do Império Romano do Oriente. A herança grega foi aqui conservada tanto quanto possível e deu a possibilidade aos eruditos latinos de estudarem directamente os clássicos gregos, sem ser necessário recorrer às traduções árabes (ou siríacas ou hebraicas).

4

Como dissemos, as primeiras cidades comerciais poderosas surgiram em Itália, onde, durante os séculos XII e XIII, Génova, Pisa, Veneza, Milão e Florença mantiveram um comércio florescente entre o mundo árabe e o Norte. Os mercadores italianos visitaram o Oriente e estudaram a sua civilização; as viagens de Marco Polo revelaram a coragem destes aventureiros. Tal como os mercadores jónios, 2000 anos antes, tentaram estudar as ciências e as artes da civilização mais antiga, não só para as reproduzir, mas também para as assimilar na sua própria sociedade mercantil, que já nos séculos XII e XIII assistia ao crescimento do comércio bancário e ao começo de uma forma de indústria capitalista. O primeiro mercador ocidental cujos trabalhos de matemática revelaram uma determinada maturidade foi Leonardo de Pisa.

Leonardo, também chamado Fibonacci («membro da casa dos Bonnacci»), viajou pelo Oriente como mercador. No regresso escreveu o seu *Liber Abaci* (1202), que estava cheio de informações aritméticas e algébricas recolhidas nas suas viagens. Em *Practica Geometriae* (1220), Leonardo descreveu de uma forma semelhante aquilo que tinha descoberto na geometria e na trigonometria. Também pode ter sido um investigador original, pois os seus livros contêm muitos exemplos que parecem não existir nas obras árabes[73]. Porém, Leonardo cita Al-Khwārizmī,

[73] L. C. Karpinski (*Amer. Math. Monthly*, vol. 21, 1914, pp. 37-48), utilizando o manuscrito da álgebra de Abū Kāmil, reinvindica que Leonardo seguiu Abū Kāmil numa série completa de problemas.

como, por exemplo, na discussão da equação $x^2 + 10x = 39$. O problema que conduz à «série de Fibonacci» — 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... —, na qual cada termo é a soma dos dois termos precedentes, parece ser novidade, bem como a sua notavelmente moderna prova de que as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ não podem ser expressas através de irracionalidades euclidianas $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (e portanto não podem ser construídas por meio de régua e compasso). Numa prova, Leonardo confronta cada um dos quinze casos de Euclides; obteve depois, aproximadamente, a raiz positiva desta equação, com seis casas sexagesimais.

A série de Fibonnaci resultou do seguinte problema:

> Quantos casais de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal durante um ano se *a*) cada casal originar um novo casal em cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês; e *b*) não ocorrerem mortes?

O *Liber Abaci* foi um meio pelo qual o sistema de numeração indo-árabe foi introduzido na Europa ocidental. O seu uso ocasional data de alguns séculos anteriores a Leonardo, quando foi importado pelos mercadores, embaixadores, eruditos, peregrinos e soldados vindos de Espanha e do Oriente. O mais antigo manuscrito europeu que contém numerais é o *Codex Vigilanus*, escrito em Espanha em 976. Porém, a introdução dos dez símbolos na Europa ocidental foi lenta; o primeiro manuscrito francês onde são encontrados data de 1275. O sistema de numeração grega permaneceu em voga na região do Adriático durante muitos séculos. O cálculo era muitas vezes realizado no antigo ábaco, um quadro com contas ou pedras (seixos) (muitas vezes consistindo apenas em linhas desenhadas na areia) semelhante, em princípio, aos quadros de contagem ainda usados pelos Russos, Chineses, Japoneses e por crianças nos parques infantis. Os numerais romanos eram usados para registar o resultado de um cálculo feito no ábaco. Durante a Idade Média (e mesmo mais tarde) encontramos numerais romanos nos registos dos mercadores, o que indica que o ábaco era usado na contabilidade. A introdução dos numerais indo-árabes encontrou a oposição

do público, visto que estes símbolos dificultavam a leitura dos livros dos mercadores. Nos estatutos da *Arte del Cambio*, de 1299, e mesmo mais tarde, os banqueiros de Florença estavam proibidos de usar numerais árabes e eram obrigados a usar os símbolos romanos. Durante o século XIV, os mercadores italianos começaram a usar numerais árabes nos seus livros de contas[74]. Ocasionalmente encontramos formas intermédias, tais como $\text{II}^{m}\text{III}^{c}\text{XV}$ para representar 2315.

5

Com a extensão do comércio, o interesse pela matemática espalhou-se, embora lentamente, até às cidades do Norte. Primeiro era principalmente um interesse prático, e, por muitos séculos, a aritmética e a álgebra foram ensinadas fora das universidades por calculadores autodidactas (*Rechenmeister, reckon masters* ou aritméticos), que, em geral, ignoravam os clássicos e também ensinavam contabilidade e navegação. Durante muito tempo, este tipo de matemática manteve traços característicos da sua origem árabe, tal como as palavras «álgebra» e «algoritmo» testemunham.

A matemática especulativa não desapareceu totalmente durante a Idade Média, se bem que não fosse cultivada entre

---

[74] Nos livros de contas dos Medici (datados de 1406) da Colecção Selfridge, depositada na Harvard Graduate School of Business Administration, os numerais indo-árabes aparecem frequentemente na coluna narrativa ou descritiva. A partir de 1439 substituem os numerais romanos na coluna do dinheiro, ou seja, na coluna efectiva dos livros de primeira entrada —jornais, borrões, etc.—, mas só a partir de 1482 foram os numerais romanos abandonados na coluna dos dinheiros nos registos comerciais, excepto nos de um mercador Medici. De 1494 em diante, são usados apenas numerais indo-árabes nos livros de contas dos Medici. (De uma carta do Dr. Florence Edler de Roover.) Ver também F. Edler, *Glossary of Medieval Terms of Business*, Cambridge, Mass., 1934, p. 389. E ainda: D. J. Struik, «The prohibition of the use of Arabic numerals in Florence», in *Arch. intern. hist. sc.*, vol 21, 1968, pp. 291-294.

os homens práticos, mas sim pelos filósofos escolásticos. Entre esses, o estudo de Platão e Aristóteles, combinado com meditações sobre a natureza da Divindade, conduziu a especulações subtis sobre a natureza do movimento, do contínuo e do infinito. Orígenes seguiu Aristóteles ao negar a existência do infinito actual, mas Santo Agostinho, na *Civitas Dei*, tinha aceite toda a sequência de inteiros como um infinito actual. As suas palavras foram tão bem escolhidas que George Cantor sublinhou que o transfinito não podia ter sido mais energicamente desejado e mais perfeitamente determinado e defendido do que foi por Santo Agostinho[75]. Os escritores escolásticos da Idade Média, especialmente São Tomás de Aquino, aceitaram o *infinitum actu non datur*[76], de Aristóteles, mas consideraram todo o contínuo potencialmente divisível *ad infinitum*. Deste modo, não existia nenhuma linha mais pequena. Por isso, um ponto não era uma parte de uma recta, porque era indivisível: *ex indivisibilibus non potest constare aliquod continuum*[77]. Um ponto podia porém gerar uma linha através do movimento. Estas especulações tiveram influência nos inventores do cálculo infinitesimal, do século XVII, e nos filósofos do transfinito, do século XIX; Cavalieri, Tacquet, Bolzano e Cantor conheciam os autores escolásticos e meditaram sobre o significado das suas ideias.

Ocasionalmente, estes homens de igreja atingiram resultados de interesse matemático mais imediato. Thomas Bradwardine, que se tornou ascebispo de Cantuária, investigou os polígonos estrelados depois de ter estudado Boécio. O mais importante destes matemáticos eclesiásticos da Idade Média foi Nicole

---

[75] G. Cantor, «Letter to Eulenburg (1886)», in *Ges. Abhandlugen*, Berlim, 1932, pp. 401-402. A passagem citada por Cantor, do cap. XVIII do liv. XII da *Cidade de Deus* (na tradução de Healey), é intitulada «Contra todos os que dizem que as coisas infinitas se encontram mais altas que a sabedoria de Deus».

[76] «Não existe infinito actual.» Ver E. Bodewig, «Die Stellung des hl. Thomas von Aquino zur Mathematik», in *Arch. f. Geschichte der Philosophie*», vol. 41, 1932, pp. 408-434.

[77] «Um contínuo não pode consistir de indivisíveis.»

Oresme, bispo de Lisieux, na Normandia, que trabalhou com potências fraccionárias. Como $4^3 = 64 = 8^2$, escreveu 8 na forma $\boxed{1^{p}\frac{1}{2}}$ 4 ou $\boxed{\frac{p.1}{1.2}}$ 4, significando $4^{1\frac{1}{2}}$. Também escreveu um trabalho chamado *De latitudinibus formarum* (*c.* 1360), no qual traça o gráfico de uma variável dependente *(latitudo)* contra uma independente *(longitudo)*, que é submetida a variação. Revela uma espécie de transição vaga das coordenadas na esfera celeste ou terrestre, conhecidas pelos antigos, para a geometria moderna das coordenadas. Este trabalho foi impresso várias vezes entre 1482 e 1515 e pode ter influenciado os matemáticos do Renascimento, incluindo Descartes. Oresme também escreveu uma série infinita, mostrando que a série harmónica é divergente, um resultado notável para aquela época.

6

A principal linha de desenvolvimento da matemática passara pelo crescimento das cidades mercantis sob a influência directa do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura. Os habitantes da cidade estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação. Sombart designou este interesse do burguês dos séculos XV e XVI por *Rechenhaftigkeit*[78]. No amor pela matemática prática destacavam-se os «mestres de cálculo» *(reckon masters)*, só ocasionalmente associados a um universitário, capaz de perceber, através dos seus estudos sobre astronomia, a importância do desenvolvimento dos métodos computacionais. Os centros da nova vida eram as cidades italianas e as cidades da Europa central, tais como Nuremberga, Viena e Praga. A queda de Constantinopla, em 1453, que pôs fim ao Império Bizantino, conduziu muitos sábios gregos às cidades oci-

---

[78] W. Sombart, *Der Bourgeois*, Munique e Leipzig, 1913, p. 164. O termo *Rechennhaftigkeit* indica um desejo de calcular, uma crença na utilidade do trabalho aritmético.

dentais. Aumentou o interesse pelos textos gregos originais e tornou-se mais fácil satisfazer este interesse. Os professores universitários juntaram-se a homens laicos cultos no estudo de textos e os «mestres de cálculo» mais ambiciosos ouviam e tentavam compreender à sua maneira os novos conhecimentos.

É típico deste período Johannes Müller, de Königsberg[79], ou Regiomontano, a principal figura da matemática do século XV. A actividade deste notável fabricante de instrumentos, impressor e cientista ilustra os avanços feitos na matemática europeia durante os dois séculos posteriores a Leonardo de Pisa. Teve um papel activo na tradução e publicação dos manuscritos clássicos de matemática disponíveis. O seu professor, o astrónomo vienense George Peurbach —autor de tabelas astronómicas e trigonométricas—, tinha já começado uma tradução, do grego, da astronomia de Ptolomeu. Regiomontano continuou esta tradução e também traduziu Apolónio, Herão e o mais difícil de todos, Arquimedes. O seu trabalho mais original foi *De triangulis omnimodis libri quinque* (1464; não foi impresso até 1533), uma introdução completa à trigonometria, diferindo dos nossos textos actuais, basicamente, porque a nossa notação não existia. Contém a lei dos senos num triângulo esférico. Todos os teoremas ainda tinham de ser expressos por palavras. A trigonometria tornou-se, a partir de então, uma ciência independente da astronomia. Nasīr al-dīn tinha feito algo de semelhante no século XIII, mas é significativo que o seu trabalho nunca tivesse originado muitos progressos, enquanto o livro de Regiomontano influenciou profundamente o desenvolvimento posterior da trigonometria e das suas aplicações à álgebra e à astronomia. Regiomontano também se dedicou muito ao cálculo de tabelas trigonométricas. Por exemplo, ele tem tábuas de senos para um raio de 60,000 com intervalos de um minuto, que foram impressas depois da sua morte.

---

[79] Não é a cidade do Báltico (actualmente Kaliningrad), mas uma pequena cidade da Baviera, ao Sul do Meno.

Os senos eram segmentos de linha, definidos como semicordas subtendendo ângulos num círculo. Os seus valores numéricos dependiam, por isso, do comprimento do raio. Um raio grande permitia grande exactidão no valor dos senos, sem necessidade de introduzir fracções sexagesimais (ou decimais). O uso sistemático do raio 1, e por isso dos conceitos de seno, tangente, etc., como razões (números), é devido a Euler (1748), que também introduziu a nossa notação actual.

7

Ainda não tinha sido dado um passo definitivo além do conseguido pelos Gregos e pelos Árabes. Os clássicos permaneciam o *ne plus ultra* da ciência. Por isso foi uma enorme e estimulante surpresa quando os matemáticos italianos, no início do século XVI, demonstraram que era possível desenvolver uma teoria matemática nova que tinha escapado aos antigos e aos Árabes. Esta teoria, que conduziu às soluções algébricas gerais de equações cúbicas, foi descoberta por Scipio del Ferro e pelos seus alunos na Universidade de Bolonha.

As cidades italianas continuaram a revelar competência na matemática, depois de Leonardo de Pisa. No século XV, os seus «mestres de cálculo» conheciam bem as operações aritméticas, incluindo os números surdos[80] (sem qualquer escrúpulo geométrico) e os seus pintores eram bons geómetras. Vasari, em *Vidas de Pintores*[81] (1550, 1564-68), menciona o interesse que muitos artistas e engenheiros do século XV mostravam pela geometria sólida. Uma das suas realizações foi o estudo da noção de perspectiva linear, começado com Brunelleschi, Donatello e Uccello

[80] Os números surdos, ou, na terminologia moderna, os números construtíveis, compreendem, além dos números racionais, uma classe de números irracionais. *(N. do T.)*

[81] *Le vite de' più eccellenti pittori, scultori e architettori* (1550, ed. aumentada em 1564-68). Existem várias traduções em inglês, entre elas uma selecção na colecção Penguim (1965).

e continuado por homens como Masaccio, Alberti e Piero della Francesca. O último escreveu um volume sobre corpos sólidos em perspectivas. Leonardo da Vinci e Rafael também estudaram a perspectiva[82].

Com a invenção da imprensa começaram a ser publicados livros para o ensino da aritmética prática e nas aplicações comerciais, espalhando a arte por toda a parte[83]. O mais impressionante livro de matemática destes primeiros tempos da imprensa foi escrito pelo franciscano Luca Pacioli, aparecendo em 1494 com o nome de *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* (in-fólio, 600 páginas)[84]. Escrito em italiano —e um italiano agradável—, continha tudo o que era conhecido naquela altura sobre aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Por essa época, o uso de numerais indo-árabes estava bem estabelecido e a notação aritmética não diferia muito da nossa. Pacioli terminou o seu livro com a observação de que a solução das equações que na nossa notação actual se escrevem $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ parecia tão impossível no estado da ciência de então quanto a quadratura do círculo.

Neste ponto começavam os trabalhos dos matemáticos da Universidade de Bolonha. Esta Universidade, por volta do século XV, era uma das maiores e mais famosas da Europa. Só a sua Faculdade de Astronomia teve em dado momento dezasseis leitores. De todas as partes da Europa afluíam estudantes para ouvir as lições—e para os debates públicos, que também atraíam a atenção de muitos com uma mentalidade algo desportiva.

---

[82] S. Y. Edgerton, Jr., *The Renaissance Rediscovery of Linear Perspective*, Nova Iorque, 1975.

[83] Alguns dos primeiros livros de matemática a serem impressos foram uma aritmética comercial (Treviso, 1478) e uma edição latina dos *Elementos*, de Euclides (Veneza, Ratdolf, 1482).

[84] Pacioli também publicou um livro sobre a secção de ouro, *Divina Proportionae* (1509). As suas belas figuras, incluindo as dos poliedros estrelados, foram atribuídas a Leonardo da Vinci. Também publicou o primeiro tratado de contabilidade de dupla entrada [partida dobrada] como parte da sua *Summa*.

Entre os estudantes encontravam-se, numa altura ou noutra, Pacioli, Albrecht Dürer e Copérnico. Era característico da nova era o desejo não só de absorver informações clássicas, mas também de criar novas coisas, ultrapassar os limites estabelecidos pelos clássicos. A imprensa e a descoberta da América foram exemplos de tais possibilidades. Era possível criar uma nova matemática? Os Gregos e os Orientais tinham ensaiado o seu engenho na solução de equações do 3.º grau, mas haviam resolvido apenas alguns casos numericamente. Os matemáticos bolonheses tentavam agora encontrar a solução geral.

Estas equações cúbicas podiam ser todas reduzidas a três tipos:

$$x^3 + px = q, \qquad x^3 = px + q, \qquad x^3 + q = px$$

onde p e q são números positivos. Foram investigadas especialmente pelo Prof. Scipio del Ferro, que morreu em 1526. Pode crer-se, pela autoridade de E. Bortolotti[85], que, na realidade, del Ferro resolveu todos os tipos. Nunca publicou as suas soluções e falou a poucos amigos sobre elas. Contudo, a fama da descoberta tornou-se conhecida e, depois da morte de Scipio, um calculador veneziano chamado Tartaglia, alcunhado de «O Gago», redescobriu os seus métodos (1535). Tartaglia mostrou publicamente os seus resultados, mas novamente guardou segredo em relação ao método pelo qual os obtivera. Finalmente, revelou as suas ideias a um ilustrado médico de Milão, Girolamo Cardano (Jerome Cardan em inglês), que teve de jurar que guardaria segredo. Mas, quando Cardano, em 1545, publicou o seu pequeno, mas notável, livro de álgebra, com o orgulhoso título de *Ars magna*, Tartaglia descobriu, para seu desgosto, que o método era amplamente divulgado no livro, com o devido reconhecimento ao descobridor, mas, de qualquer maneira, roubado. Seguiu-se um debate amargo, com insultos lançados de

---

[85] E. Bortolotti, «L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI», in *Periodico di Matematica*, sér. 4, vol. 5, 1925, pp. 147-184.

parte a parte, no qual Cardano foi defendido por um estudioso mais novo, Ludovico Ferrari.

Desta quezília surgiram documentos interessantes, entre eles os *Quaesiti*, de Tartaglia (1546), e os *Cartelli*, de Ferrari (1547-48), nos quais toda a história desta descoberta espectacular se tornou do conhecimento público. A *Ars magna* continuou a ser uma referência de autoridade durante muitos anos.

A solução é agora conhecida como solução de Cardano, que para o caso de $x^3 + px = q$ toma a forma:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$$

Vemos que esta solução introduzia quantidades da forma $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$, diferente da forma euclidiana $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

A Ars magna, de Cardano, continha outra descoberta brilhante: o método de Ferrari para reduzir a solução da equação biquadrática geral à de uma equação cúbica. A equação de Ferrari era $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, que ele reduziu a $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$. Cardano também considerou números negativos, chamando-lhes «fictícios», mas foi incapaz de fazer avançar o chamado «caso irredutível» da equação cúbica, no qual há três raízes reais que aparecem como somas ou diferenças daquilo que agora chamamos «números complexos».

Esta dificuldade foi resolvida pelo último dos grandes matemáticos bolonheses do século XVI, Raffael Bombelli, cuja *Algebra* apareceu em 1572. No seu livro —e num outro sobre geometria, escrito por volta de 1550 e que permaneceu como manuscrito— introduziu uma teoria consistente de números complexos imaginários. Ele escreveu $3i$ como $\sqrt{0-9}$ (literalmente: *R* [0 *m*. 9], *R* para raiz, *m* para menos). Este facto permitiu a Bombelli tratar o caso irredutível, demonstrando, por exemplo, que:

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0-2209}} = 4 + \sqrt{0-1}$$

O livro de Bombelli foi muito lido; Leibniz seleccionou-o para estudar equações cúbicas e Euler cita Bombelli na sua própria *Algebra,* no capítulo sobre equações biquadráticas. A partir dessa altura, os números complexos perderam parte do seu carácter sobrenatural, apesar de a sua aceitação total datar do século XIX.

É curioso o facto de a primeira introdução dos imaginários ter ocorrido na teoria das equações cúbicas, no caso onde era claro que existiam soluções reais, embora de uma forma irreconhecível, e não na teoria das equações quadráticas, onde os nossos compêndios actuais as introduzem.

8

A álgebra e a aritmética computacional continuaram a ser durante muitas décadas o assunto favorito da experimentação matemática. O estímulo já não provinha apenas da *Rechenhaftigkeit* da burguesia mercantil, mas também das exigências da agrimensura e da navegação feitas pelos chefes dos novos estados nacionais. Eram necessários engenheiros para as obras públicas e para construções militares. Tal como em todos os períodos anteriores, a astronomia continuou a ser um domínio importante para os estudos matemáticos. Foi o período das grandes teorias astronómicas de Copérnico, Tycho Brahe e Kepler. Surgiu uma nova concepção do universo.

O pensamento filosófico reflectia as tendências do pensamento científico; Platão e a sua admiração pelo raciocínio matemático quantitativo ganhou ascendente sobre Aristóteles. A influência platónica é particularmente evidente nos trabalhos de Kepler. As tabelas trigonométricas e astronómicas apareceram com uma exactidão crescente, especialmente na Alemanha. As tabelas de G. J. Rheticus, professor em Vitemberga e amigo de Copérnico, terminadas em 1596 pelo seu aluno Valentin Otho, continham os valores de todas as seis funções trigonométricas de dez em dez segundos com dez decimais. São conhecidas como



FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)



JOHN NAPIER (1550-1617)

Opus Palatinum. As tabelas de Pitiscus (1613) chegaram a quinze casas decimais. A técnica de resolução de equações e a compreensão da natureza das suas raízes também se desenvolveram. O desafio público, feito em 1593 pelo matemático belga Adriaen van Roomen, para resolver a equação do 45.° grau,

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+\ldots-3795x^{3}+45x=A$$

era característica da época. Van Roomen propunha o estudo de casos especiais, como, por exemplo:

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\text{, que dava } x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

casos que foram sugeridos pela consideração de polígonos regulares.

François Viète, um jurista francês ligado à corte de Henrique IV, resolveu o problema de Van Roomen observando que o primeiro membro da equação era equivalente à expressão de sen ϕ em termos de sen $\phi/45$. A solução podia, por isso, ser encontrada com a ajuda de tabelas. Viète encontrou 23 soluções da forma sen $(\phi/45-n.8°)$, pondo de parte as raízes negativas. Viète também reduziu a solução de Cardano da equação cúbica a uma solução trigonométrica; neste processo, a introdução dos números imaginários tornou-se desnecessária, perdendo-se o horror ao caso irredutível. Esta solução pode ser encontrada agora nos texto de «álgebra superior»[86].

Os principais resultados de Viète integravam-se no desenvolvimento da teoria das equações (por exemplo: *In artem analyticam isagoge*, 1591), onde se encontram algumas das primeiras representações de número por letras. O uso de coeficientes numéricos, mesmo na álgebra «sincopada» da escola diofantina, tinha impedido a discussão geral de problemas algébricos. O tra-

[86] Por exemplo, em W. S. Burnside e A. W. Patton, *The Theory of Equations* (1892).

balho dos algebristas do século XVI (os «cosistas», segundo a palavra italiana *cosa* para a incógnita) era expresso através de uma notação muito complicada. Mas na *logistica speciosa* de Viète surgiu pelo menos um simbolismo geral, no qual as letras eram usadas para exprimir coeficientes numéricos, embora A^2 ainda se escrevesse «A quadratum». Os sinais + e – eram aqui também usados no seu significado actual, embora não pela primeira vez. Estes podem bem ter aparecido primeiramente, pelo menos de forma impressa, numa aritmética alemã de Johann Widmann, em 1489. Esta álgebra *speciosa* de Viète ainda diferia da nossa no que diz respeito à insistência de Viète no princípio grego da homogeneidade, segundo o qual um produto de dois segmentos de recta era necessariamente concebido como uma área; por isso, os segmentos de recta só podiam ser adicionados a segmentos de recta, áreas a áreas e volumes a volumes; havia mesmo algumas dúvidas quanto a saber se as equações de grau superior a 3 tinham realmente algum significado, pois elas só podiam ser interpretadas em quatro dimensões, uma concepção difícil de entender naquela época e ainda durante muito tempo.

Este foi o período em que a técnica computacional atingiu novos níveis e, por fim, começou a ultrapassar as realizações do mundo islâmico. Viète desenvolveu os trabalhos de Arquimedes e encontrou π com nove casas decimais; pouco depois, π foi calculado com trinta e cinco decimais por Ludolph Van Coolen, um mestre de esgrima de Delft que utilizou polígonos regulares inscritos e circunscritos com cada vez mais lados. Viète também representou π como um produto infinito (1593) na nossa notação:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\ldots$$

O desenvolvimento da técnica foi um resultado do aperfeiçoamento da notação. Os novos resultados revelam claramente que é incorrecto dizer que homens como Viète «apenas» desen-

volveram a notação. Uma tal afirmação ignoraria completamente a relação profunda entre conteúdo e forma. Novos resultados tornaram-se muitas vezes possíveis devido somente a um novo modo de escrever. A introdução dos numerais indo-árabes é um exemplo; a notação de Leibniz para o cálculo é outro. Uma notação adequada reflecte melhor a realidade que uma notação pobre e, como tal, surge com uma vida própria, que, por seu turno, cria uma nova vida. O aperfeiçoamento da notação feito por Viète foi seguido, uma geração mais tarde, pelas aplicações da álgebra à geometria, feitas por Descartes, e pela nossa notação actual.

9

Os engenheiros e os aritméticos eram particularmente procurados nos novos estados comerciais, especialmente na França, na Inglaterra e na Holanda. A astronomia florescia em toda a Europa. Embora, depois da descoberta do caminho marítimo para a Índia, as cidades italianas já não estivessem na principal rota de ligação com o Oriente, ainda permaneceram centros importantes. Assim, entre os grandes matemáticos e calculadores do começo do século XVII encontramos Simon Stevin, um engenheiro, Johann Kepler e Thomas Harriot, astrónomos, e Adriaen Vlacq e Ezechiel de Decker, agrimensores.

Stevin, um guarda-livros de Bruges, tornou-se engenheiro no exército do príncipe Maurício de Orange, que apreciava a maneira como Stevin combinava o sentido prático com a compreensão teórica e a originalidade. Em *La disme* (1585) introduziu fracções decimais como parte de um projecto para unificar o sistema de medições numa base decimal. Foi um dos maiores desenvolvimentos tornados possíveis pela introdução do sistema de numeração indo-árabe.

O outro grande desenvolvimento no cálculo foi a invenção dos logaritmos. Vários matemáticos do século XVI tinham-se confrontado com a possibilidade de coordenar progressões arit-

méticas e geométricas, principalmente no que diz respeito a facilitar o trabalho com as complicadas tabelas trigonométricas. Uma importante contribuição para este objectivo foi empreendida por um proprietário de terras escocês, John Napier (ou Neper), que em 1614 publicou *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. A sua ideia principal foi construir duas sucessões de números de tal modo relacionadas, que, quando uma crescesse em progressão aritmética, a outra decrescesse em progressão geométrica. Como o produto de dois números na segunda sucessão tem uma relação simples com a soma dos números correspondentes na primeira, a multiplicação podia ser reduzida à adição. Com este sistema, Napier poderia facilitar consideravelmente o cálculo com senos. A primeira tentativa de Napier foi muito desajeitada, dado que as suas duas sucessões se correspondiam de acordo com a fórmula moderna.

$$y = ae^{-x/a} \quad (\text{ou } x = \text{Nep. } \log y)$$

na qual $a = 10^7$ [87]. Quando $x = x_1 + x_2$, não obtemos $y = y_1y_2$, mas sim $y = y_1y_2/a$. Este sistema não satisfez o próprio Napier, tal como revelou ao seu admirador Henry Briggs, um professor do Gresham College, em Londres. Decidiram-se pela função $y = 10^x$, para a qual $x = x_1 + x_2$ produzia na realidade $y = y_1y_2$. Briggs, depois da morte de Napier, levou avante esta sugestão e em 1624 publicou *Arithmetica logarithmica*, que continha os logaritmos «de Briggs» com 14 casas decimais para os inteiros desde 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000. O intervalo entre 20 000 e 90 000 foi completado por Ezechiel de Decker, um agrimensor holandês que, assistido por Vlacq, publicou em Gouda,

[87] Por isso, Nep. $\log y = 10^7$ ($\ln 10^7 - \ln y = 161180957 - 10^7 \ln y$; e Nep. $\log 1 = 161180957$; $\ln x$ significa o nosso logaritmo natural. Foi também Napier que modificou a notação de Stevin para as fracções decimais, introduzindo a nossa notação com o ponto ou a vírgula. As fracções decimais, como vimos, já tinham sido usadas pelos matemáticos chineses e árabes muito antes de Stevin.

em 1627, uma tabela completa de logaritmos. A nova invenção foi imediatamente bem recebida pelos matemáticos e astrónomos, e particularmente por Kepler, que tivera uma longa e dolorosa experiência com cálculos elaborados.

A nossa explicação dos logaritmos em termos de exponenciais é historicamente algo enganosa, pois o conceito de exponencial data apenas do final do século XVII. Napier não tinha a noção de base. Os logaritmos naturais, associados à função $y = e^x$, apareceram quase na mesma altura que os logaritmos de Briggs, mas a sua importância fundamental não seria reconhecida até que o cálculo infinitesimal passasse a ser mais bem compreendido[88].

BIBLIOGRAFIA

Sobre a expansão dos numerais indo-árabes na Europa ver:

Smith, D. E., e Karpinski, L. C., *The Hindu-Arabic Numerals*, Boston e Londres, 1911.

Sobre as matemáticas especulativas na Idade Média ver:

Boyer, C. B., *The History of the Calculus*, Nova Iorque, 1949; reedição de Dover, 1959. (Ver cap. III).

As matemáticas italianas dos séculos XVI e XVII são discutidas numa série de artigos:

Bortolotti, E., uma série de artigos escritos entre 1922 e 1928, por exemplo no *Periodico di matematica*, vol. 5, 1925, pp. 147-184; *ibid.*, vol. 6, 1926, pp. 217-230; *ibid.*, vol. 8, 1928, pp. 19-59; *Scientia*, 1923, pp. 385-394.

—, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche*, Imola, 1926.

A autobiografia de Cardano foi traduzida:

Cardano, J., *The Book of My Life*, Londres, 1931. (Trad. por J. Stoner.)

[88] E. Wright, que escreveu sobre navegação, publicou alguns logaritmos naturais em 1618 e J. Speidell em 1619, mas não foram publicadas mais tabelas de logaritmos até 1770. Ver F. Cajori, «History of the Exponential and Logarithmic Concepts», in *Amer. Math. Monthly*, vol. 20, 1913, 7 artigos.

Ver também:

Ore, O. Cardano, *The Gambling Scholar*, Princeton, 1953.

Nos artigos de H. Bosmans, S. J., podem encontrar-se muitas informações sobre os matemáticos dos séculos XVI e XVII e sobre as suas obras. A maior parte desses artigos podem ser encontrados em *Annales de la Société Scientifique Bruxelles*, 1905-27. (É dada uma lista completa por A. Rome em *Isis*, vol. 12, 1929, pp. 88-112).

Edições modernas ou traduções de autores referidos neste capítulo:

Grant, E. (ed.) *De proportionibus proportionum* (por Nicole Oresme), Madison, Wis., 1966.

Boncampagni, B. (ed.), *Scritti di Leonardo Pisano*, 2 vols., Roma, 1857-62.

Hughes, B. (trad.) *Regiomontanus on Triangles*, Madison, Wis., etc., 1967. Ver B. Rosenfeld, *Scripta math.*, vol. 28, 1970, pp. 364-365.

Gould, S. H. (trad.), *The Book of Games of Chance* (por Girolamo Cardano), Nova Iorque, 1961.

Stevin, S., *The Principal Works*, 5 vols., Amsterdam, 1955-66. Os vols. IIA, B (1958) contêm as obras matemáticas.

Masotti, A. (ed.), *Quaesiti* (por Tartaglia) e *Cartelli* (por Tartaglia e Ferrari), Brescia, 1959, 1974.

Viète, F., *Opera mathematica*, Leida, 1646. Reeditado com um prefácio de J. E. Hofmann, Hildesheim e Nova Iorque, 1970.

Macdonald, W. R. (trad.), *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms* (por Napier), Edimburgo, 1889.

Busard, H. L. L. (ed.), *Quaestiones Super Geometriam Euclidis* (por Nicole Oresme), Leida, 1961.

Hofmann, J. e J. E. (trads. e eds.), *Mathematische Schriften* (por Nikolau von Cues), Hamburgo, 1952.

Crosby, H. L. (ed.), *Tractatus de Proportionibus* (por Thomas de Bradwardine), Madison, Wis., 1955.

Arrighi, G. (ed.), *Trattato d'aritmetica* (por Piero Dell'Abbaco), Pisa, 1964.

Bubnow, N. (ed.), *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, Berlim, 1899. Nova edição aumentada, Hildesheim, 1913.

Witmer, T. R. (trad. e ed.), *The Great Art or The Rules of Algebra by Girolamo Cardano*, Cambridge, Mass., e Londres, 1968. (É a «Ars Magna» em inglês com uma notação moderna.)

Além destas obras, ver:

Carslaw, H. S., «The Discovery of Logarithms by Napier», in *Math. Gazette*, vol. 8, 1915-16, pp. 76-84 e 115-119.

Blaschke, W., e Shoppe, G., *Regiomontanus, Commensurator*, Berlim, 1956.
Napier Tercentenary Memorial Volume, C. G. Knott, ed. Londres e Nova Iorque, 1915.
Zinner, E., *Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg genannt Regiomontanus*, Munique, 1938.
Bond, J. D., «The Development of Trigonometric Methods Down to the Close of the Fifteenth Century», in *Isis*, vol. 4, 1921-22, pp. 295-323.
Yeldham, F. A., *The Story of Reckoning in the Middle Ages*, Londres, 1926.
Dijksterhuis, E. J., *Simon Stevin*, Haia, 1943. (Em inglês: Haia, 1970.)
Thorndike, L., *The Sphere of Sacrobosco*, Chicago, 1949.
Geyer, B., «Die mathematischen Schriften des Albertus Magnus», in *Angelicus*, 35, 1958, pp. 159-175.
Bodewig, E., «Die Stellung des heiligen Thomas von Aquino zur Mathematik», in *Arch. f. Geschichte der Philosophie*, vol. 11, 1931, pp. 1-34.
Hofmann, J. F., «Über Viète's Beiträge zur Geometric der Einschiebungen», in *Math-physik, Semesterberichte*, n.º 8, 1962, pp. 191-214.
Taylor, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*, Cambridge, 1954.
Voelling, E., «Jost Bürgi und die Logarithmen», in *Elemente der Mathematik*, supl. 5, Basileia, 1948.
Treutlein, P., «Das Rechnen im 16. Jahrhundert», in *Abh. zur Geschichte der Mathematik*, n.º 1, 1877, pp. 1-100.
—, «Die deutsche Coss», *ibid.*, n.º 2, 1879, pp. 1-124.
Clagett, M., *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, Madison, Wis., e Londres, 1959.
—, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. I, Madison, Wis., 1964.
Sarton, G., *Six Wings: Men of Science of the Renaissance*, Bloomington, Ind., 1957.
Averdunk, H., e Müller, Reinhard J., *Gerhard Mercator*, in *Petermanns Mitteilungen*, Ergänzungsheft 182, Gota, 1914, 100 pp.
Davis, N. Z., «Sixteenth Century French Arithmetics and the Business Life», in *J. Hist. of Ideas*, vol. 21, 1960, pp. 18-48.
Bockstaele, P., «Adriaan van Roomen», in *National Biogr. Woordenbock 2*, Bruxelas, 1966, pp. 752-765.
Smith, D. E., *Rara Arithmetica*, Boston e Londres, 1908, 4.ª ed., Nova Iorque, 1970.
Rose, P. L., *The Italian Renaissance of Mathematics*, Genebra, 1975.
Matvierskaya, G. P., *Desenvolvimento da Teoria dos Números na Europa até ao Século XVII* (em russo), Tashkent, 1971.

CAPÍTULO VI

O século XVII

1

O rápido desenvolvimento da matemática durante o Renascimento foi devido não só ao *Rechenhaftigkeit*[89] das classes mercantis, mas também ao uso produtivo das máquinas e ao seu aperfeiçoamento. As máquinas eram conhecidas no Oriente e na antiguidade clássica; tinham inspirado o génio de Arquimedes. Porém, a existência da escravatura e a ausência de uma vida urbana economicamente progressiva frustraram a utilização de máquinas nestas antigas formas de sociedade. Isto é ilustrado pelos trabalhos de Herão, onde são descritas máquinas, mas apenas com o objectivo de divertir ou iludir.

No final da Idade Média, as máquinas foram usadas nas pequenas manufacturas, nas obras públicas e na exploração mineira. Eram empreendimentos realizados por mercadores das cidades ou por príncipes que procuravam lucro fácil e, muitas vezes, em oposição às corporações das cidades. As guerras e a navegação também estimularam o aperfeiçoamento dos utensílios e, posteriormente, a sua substituição por máquinas.

Em Luca e em Veneza existiu uma indústria de seda, bem organizada, no século XIV. Baseava-se na divisão do trabalho

---

[89] Ver cap. V. *(N. do T.)*

e no uso da energia hidráulica. No século XV, a mineração na Europa central desenvolveu-se numa indústria perfeitamente capitalista baseada tecnicamente no uso de bombas hidráulicas e de máquinas de içar que permitiram a perfuração de estratos cada vez mais profundos. A invenção de armas de fogo e da imprensa, a construção de moinhos de vento e de canais e a construção de barcos para navegar no oceano requereram perícia da engenharia e tornaram as pessoas conscientes do valor da técnica. O aperfeiçoamento dos relógios, úteis para a astronomia e a navegação, e muitas vezes instalados em praças públicas, colocou ante os olhos do público peças admiráveis de mecânica; a regularidade do seu movimento e a possibilidade que ofereciam de indicar o tempo exacto impressionaram profundamente o pensamento filosófico. Durante o Renascimento, e mesmo nos séculos posteriores, o relógio foi considerado o modelo do universo. Foi um factor importante no desenvolvimento da concepção mecanicista do mundo. Representou também uma transformação psicológica, expressa nas palavras «tempo é dinheiro».

As máquinas conduziram à mecânica teórica e ao estudo científico do movimento e da mudança em geral. A antiguidade já tinha produzido textos sobre estática e o novo estudo das máquinas teóricas baseava-se naturalmente na estática dos autores clássicos. Apareceram livros sobre máquinas muito antes da invenção da imprensa; primeiro descrições empíricas (Kyeser, princípios do século XV), depois mais teóricas, tal como o livro de Leon Battista Alberti sobre arquitectura (*c.* 1450) e os escritos de Leonardo da Vinci (*c.* 1500). Os manuscritos de Leonardo contêm as origens de uma teoria mecanicista da natureza. Tartaglia, na sua *Nuova scienzia* (1537), discutiu a construção dos relógios e a órbita dos projécteis — mas ainda não tinha encontrado a órbita parabólica, descoberta por Galileu. A publicação de edições latinas de Herão e Arquimedes estimulou este tipo de pesquisa, especialmente a edição de Arquimedes de F. Commandino, que apareceu em 1558 e deixou ao alcance dos matemáticos o antigo método de integração. Commandino aplicou

estes métodos ao cálculo de centros de gravidade (1565), embora com menos rigor que o seu mestre.

Este cálculo de centros de gravidade tornou-se o assunto favorito para os sábios arquimedianos, que utilizaram os seus estudos de estática para obter um conhecimento prático dos rudimentos daquilo que agora reconhecemos como sendo o cálculo infinitesimal[90]. Entre estes estudiosos de Arquimedes destacavam-se Simon Stevin, que escreveu sobre centros de gravidade e sobre hidráulica em 1586; Luca Valerio, que escreveu sobre centros de gravidade em 1604 e sobre a quadratura da parábola em 1606, e Paul Guldin, em cuja *Centrobaryca* (1641) encontramos o chamado teorema de Guldin sobre centróides, já estudado por Papo. No despertar dos primeiros pioneiros chegam os grandes trabalhos de Kepler, de Cavalieri, de Torricelli e de outros, nos quais eram desenvolvidos métodos que conduziram posteriormente à invenção do cálculo infinitesimal.

2

Era típica destes autores a disposição para abandonar o rigor arquimediano em favor do uso de considerações muitas vezes baseadas em hipóteses não rigorosas, algumas delas suposições «atomistas» — provavelmente sem saberem que Arquimedes, na sua carta a Eratóstenes, tinha também usado esses métodos pelo seu valor heurístico. Isto devia-se em parte à impaciência de alguns desses autores em relação à escolástica, embora não certamente de todos, dado que vários destes pioneiros eram padres católicos de formação escolástica. O objectivo principal era o desejo de obter resultados que o método grego não era capaz de fornecer rapidamente.

A revolução na astronomia, à qual se ligam os nomes de Copérnico, Tycho Brahe e Kepler, proporcionam uma visão

---

[90] No texto original: *calculus*. Traduzimos esta palavra ora por «cálculo infinitesimal», ora por «cálculo». *(N. do T.)*.

inteiramente nova do lugar do homem no universo e do seu poder para explicar os fenómenos da astronomia de modo racional. A possibilidade de a mecânica celeste completar a mecânica terrestre fez crescer o arrojo dos homens de ciência. Nos trabalhos de Johann Kepler é particularmente evidente a influência estimulante da nova astronomia em problemas que envolviam longos cálculos, bem como considerações infinitesimais. Kepler ocupou-se do cálculo de volumes e na sua *Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Nova Esteriometria dos Barris de Vinho*, 1615) calculou volumes de sólidos obtidos por rotação de segmentos de secções cónicas em volta de um eixo no seu plano. Ele rompeu com o rigor arquimediano; o círculo compunha-se de uma infinidade de triângulos com o vértice no centro; analogamente, a esfera consistia numa infinidade de pirâmides. As provas de Arquimedes, dizia Kepler, eram absolutamente rigorosas, *absolutae et omnibus numeris perfectae*[91], mas deixava-as aos que desejassem demonstrações exactas. Cada autor era livre de encontrar a sua própria noção de rigor ou de falta de rigor.

A Galileo Galilei devemos a nova mecânica dos corpos em queda livre, o início da teoria da elasticidade e uma defesa animada do sistema de Copérnico. Acima de tudo, devemos a Galileu, mais do que a qualquer outro homem deste período, o espírito da ciência moderna baseada na harmonia da experimentação e da teoria, com realce para o uso intensivo da matemática (embora exista menos experimentação em Galileu do que é hábito crer). Nos *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638, sendo as novas ciências «mecânica e movimentos locais»), Galileu foi conduzido ao estudo matemático do movimento, à relação entre distância, velocidade e aceleração. Nunca deu uma explicação sistemática das suas ideias sobre o cálculo, deixando isto para os seus discípulos Torricelli e Cavalieri. Na realidade, as ideias de Galileu sobre estas

[91] «absolutas e em todos os aspectos perfeitas.»

questões de matemática pura eram bastante originais, como transparece da sua observação «nem o número de quadrados é menor do que o da totalidade dos números, nem o último é maior do que o primeiro». Esta defesa do infinito actual (sustentada por Salviati nos *Discorsi*) foi conscienciosamente dirigida contra as posições aristotélica e escolástica (representadas por Simplício). Os *Discorsi* tratam também da órbita parabólica de um projéctil, com tabelas para o cálculo da altura e do alcance como funções do ângulo de elevação e da velocidade inicial. Salviati sublinha também que a catenária se assemelha a uma parábola, mas não dá a descrição precisa da curva.

Galileu escreveu em italiano, tal como Stevin em holandês, Bacon em inglês e Descartes em francês, porque estes homens queriam alcançar o público que nesta época estava pronto a aprender acerca das novas ciências.

Tinha chegado o momento para uma primeira exposição sistemática dos resultados obtidos até àquela altura naquilo a que agora chamamos cálculo infinitesimal. Esta exposição surgiu na *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635), de Bonaventura Cavalieri, professor na Universidade de Bolonha. Aí Cavalieri estabeleceu uma forma simples de cálculo, baseando-a na concepção escolástica de *indivisível*[92], o ponto gerando a recta e a recta gerando o plano através do movimento. Então, adicionou segmentos de recta para obter uma área e segmentos de plano para obter um volume; mas, quando Torricelli lhe demonstrou que dessa forma se podia provar que qualquer triângulo é dividido por uma altura em duas partes iguais, ele substituiu «linha» por «faixa», ou seja, uma linha de pequena espessura, e assim

---

[92] F. Cajori, «Indivisibles and 'ghosts of departed quantities' in History of Mathematics», in *Scientia*, vol. 37, 1925, pp. 301-306; E. Hope, «Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung bis Leibniz und Newton», in *Jahresb. Deutsch. Math. Verein*, vol. 37, 1928, pp. 148-187. Sobre certas afirmações de Hoppe ver C. B. Boyer, *The History of the Calculus*, Nova Iorque, 1949, pp. 192, 206 e 209. (Reedição de Dover, 1959.)

voltou a uma teoria «atómica». As suas ideias sobre linhas que construíam uma área conduziram-no ao correcto «princípio de Cavalieri», o qual afirma que sólidos de altura igual têm o mesmo volume se as secções planas de altura igual tiverem a mesma área. Isto permitiu-lhe realizar o equivalente da integração de polinómios.

3

A evolução do cálculo, participando da renovação total das matemáticas, ocorreu num ambiente intelectual no qual os pensadores gradualmente se iam libertando da antiga visão aristotélica da natureza. Aristóteles, insistindo nas qualidades e na teleologia, tornara-se completamente inadequado num mundo onde a medição, os cálculos, a engenharia e a quantidade, em geral, com as suas relações causais, se tornavam cada vez mais importantes. Um novo método de aproximação da natureza e do homem era necessário para os círculos mais avançados e, consequentemente, uma nova matemática, que se haveria de tornar o exemplo clássico do pensamento quantitativo e lógico.

Esta evolução gradual foi consideravelmente estimulada pela publicação de *La Géométrie* (1637), de Descartes, que colocou todo o campo da geometria clássica no domínio de acção dos algebristas. O livro foi publicado originalmente como um apêndice do *Discours de la Méthode*, o discurso sobre a razão, no qual o autor expôs a sua concepção racionalista do estudo da natureza. René Descartes era francês, natural de Touraine, onde viveu como um senhor. Durante um certo tempo serviu na armada de Maurício de Orange, residiu muitos anos na Holanda e morreu em Estocolmo, para onde tinha sido convidado pela rainha da Suécia. De acordo com outros grandes pensadores do século XVII, Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e «encontrar a verdade nas ciências». Dado que as únicas ciências naturais conhecidas com algum grau de coerência sistemática eram a astronomia e



JOHANN KEPLER (1571-1630)



GALILEO GALILEI (1564-1642)
(De um quadro do Palácio Pitti, Florence, escola de J. Sutterman(s), pintor dos Medici)



RENÉ DESCARTES (1596-1650)
(De um quadro de Frans Hals)

LIVRE SECOND. 321

Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sſ tipliant

PÁGINA FAC-SIMILADA DE *LA GÉOMÉTRIE*, DE DESCARTES[93]

[93] Uma régua AK de comprimento indefinido é fixada; uma régua GL, também de comprimento indefinido, gira em torno do ponto G; e uma figura triangular KCB tem um lado KC, também de comprimento indefinido. A régua GL está engonçada em L. A figura KCB desliza ao longo da régua GL, movendo-se KB ao longo do «eixo» fixo AB. O lugar geométrico de C quando GL roda em torno de G é dado por

$$y^2 = cy - \frac{cx}{B}y + ay - ac$$

(Descartes escreve yy e tem um sinal especial para =.) É portanto uma hipérbole.

a mecânica e que a chave da compreensão da mecânica e da astronomia era a matemática, esta ciência tornou-se o mais importante meio de compreender o universo. Além disso, a matemática, com as suas proposições convincentes, era um exemplo brilhante de que a verdade podia ser encontrada na ciência. Deste modo, a filosofia mecanicista deste período chegou a uma conclusão semelhante à dos platónicos, mas por razões diferentes. Tanto os platónicos, ao acreditarem na harmonia do universo, como os cartesianos, ao acreditarem num método geral baseado na razão, encontraram na matemática a rainha das ciências.

Descartes publicou a sua *Géométrie* com uma aplicação do seu método geral de unificação racionalista, neste caso de unificação da álgebra e da geometria. O mérito do livro, de acordo com o ponto de vista geralmente aceite, consiste principalmente na criação da chamada «geometria analítica». É verdade que este ramo da matemática se desenvolveu sob a influência do livro de Descartes, mas dificilmente *La Géométrie* pode ser considerada um primeiro texto sobre este assunto. Não existem aí, explicitamente, eixos «cartesianos» e não são deduzidas equações da linha recta e das secções cónicas, embora haja algumas equações do segundo grau que são interpretadas como representativas de secções cónicas. Além disso, uma grande parte do livro consiste numa teoria de equações algébricas, contendo a «regra de Descartes» para determinar o número de raízes positivas e negativas (a que chamou raízes verdadeiras e falsas).

Não devemos esquecer que Apolónio já tinha uma caracterização das secções cónicas por meio daquilo que agora —com Leibniz— podemos chamar coordenadas, embora não lhes fossem atribuídos valores numéricos. Porém, a latitude e a longitude na *Geographia*, de Ptolomeu, eram coordenadas numéricas. Papo, na sua *Colecção*, tinha um *Tesouro de Análise (Analuomenos)*, no qual temos apenas de modernizar a notação para obter uma aplicação da álgebra à geometria. Mesmo a ideia de representação gráfica tinha ocorrido antes de Descar-

tes, como, por exemplo, nos trabalhos de Oresme. Os méritos de Descartes encontram-se sobretudo na aplicação consistente da desenvolvida álgebra do século XVI à análise geométrica dos antigos e, através disto, num enorme alargamento da sua aplicabilidade. Um segundo mérito é a definitiva rejeição de Descartes das restrições de homogeneidade dos seus predecessores, ainda frequentes na *logistica speciosa* de Viète, de forma que x^2, x^3, xy eram agora considerados como segmentos de recta. Uma equação algébrica tornou-se uma relação entre números, um novo avanço na abstracção matemática. Isto foi utilizado para o desenvolvimento posterior da álgebra e para o tratamento geral das curvas algébricas. O Ocidente, ao alcançar a tradição aritmético-algébrica do Oriente, rapidamente a ultrapassou.

Grande parte da notação de Descartes é já moderna; encontramos no seu livro expressões tais como

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

que difere da nossa notação apenas porque Descartes ainda escreve *aa* em vez de a^2 (o que também se encontra em Gauss), embora use a^3 para *aaa*, a^4 para *aaaa*. Não é difícil seguirmos o desenvolvimento do seu livro, mas não devemos procurar aí a nossa moderna geometria analítica.

Uma aproximação um pouco maior da geometria analítica veio de Pierre Fermat, um jurista de Toulouse que escreveu um pequeno ensaio sobre geometria, provavelmente antes da publicação do livro de Descartes, mas que foi publicado apenas em 1679. No seu *Isagoge* encontramos as equações

$$y = mx,\ xy = k^2,\ x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 \pm a^2y^2 = b^2$$

atribuídas a rectas e cónicas, referidas a um sistema de eixos, perpendiculares em geral. Porém, visto que foi escrito na notação de Viète, o ensaio parece mais arcaico que *La Géométrie*, de Descartes. Quando o *Isagoge*, de Fermat, foi impresso, exis-

tiam já outras publicações em que a álgebra era aplicada aos resultados de Apolónio, nomeadamente o *Tractatus de sectionibus conicis* (1655), de John Wallis, e uma parte dos *Elementa curvarum linearum* (1659), escrito por Johan De Witt, primeiro-ministro da Holanda. Ambos os trabalhos foram escritos sob a influência directa de Descartes. Mas os progressos foram muito lentos; mesmo o *Traité analytique des sections coniques*, de L'Hospital (1707), não é muito mais do que uma transcrição de Apolónio para a linguagem algébrica. Todos os autores hesitaram em aceitar valores negativos para as coordenadas. O primeiro a trabalhar audaciosamente com equações algébricas foi Newton, no seu estudo sobre curvas cúbicas (1703); a primeira geometria analítica de secções cónicas totalmente emancipada de Apolónio apareceu apenas com a *Introductio*, de Euler (1748).

4

O aparecimento do livro de Cavalieri estimulou um número considerável de matemáticos, em diferentes países, a estudar problemas que envolviam infinitesimais. Os problemas fundamentais começaram a tender para uma forma mais abstracta e, assim, ganharam em generalidade. O problema da tangente, consistindo na procura de métodos para encontrar a tangente a uma dada curva num ponto, foi tomando um lugar cada vez mais proeminente em comparação com os antigos problemas relacionados com volumes e centros de gravidade. Nesta procura existiam duas tendências bem marcadas, uma geométrica e outra algébrica. Os seguidores de Cavalieri, principalmente Torricelli e Isaac Barrow, professor de Newton, preferiam o método grego de raciocínio geométrico, sem se preocuparem muito com o seu rigor. Christiaan Huygens também demonstrou uma certa simpatia pela geometria grega. Existiram outros, principalmente Fermat, Descartes e John Wallis, que revelaram a tendência oposta e conduziram a nova álgebra a servir de suporte a estas

questões. Praticamente todos os autores deste período, de 1630 a 1660, se limitaram a questões relacionadas com curvas algébricas, especialmente aquelas com a equação $a^m y^n = b^n x^m$. E encontraram, cada um à sua maneira, fórmulas equivalentes a $\int_0^a x^m \, dx = a^{m+1}/(m+1)$, primeiro para m inteiro positivo, depois para m inteiro negativo ou fraccionário[94]. Ocasionalmente, surgia uma curva não algébrica, como a ciclóide *(roulette)* investigada por Descartes e Blaise Pascal: o *Traité général de la roulette* (1658), de Pascal, parte dum folheto publicado com o nome de A. Dettonville, teve grande influência no jovem Leibniz[95].

Neste período, vários aspectos característicos do cálculo infinitesimal começaram a aparecer. Fermat descobriu em 1638 um método para encontrar máximos e mínimos alterando um pouco a variável numa equação algébrica simples e deixando depois a alteração desaparecer; este método foi generalizado em 1658, para curvas algébricas mais gerais, por Johannes Hudde, mais tarde prefeito de Amesterdão. Determinavam-se tangentes, volumes e centróides, mas a relação entre integração e diferenciação como problemas inversos um do outro não foi entendida até que Barrow a explicasse, em 1670, embora numa forma geométrica difícil. Pascal utilizou ocasionalmente desenvolvimentos com termos de pequenas quantidades, nos quais ele desprezava os termos de menor ordem antecipando a ideia controversa de Newton de que $(x + dx)\,(y + dy) - xy = xdy + ydx$. Pascal defendeu este seu procedimento apelando mais para a intuição *(esprit de finesse)* do que para a lógica *(esprit de géométrie)*, antecipando aqui as críticas do bispo Berkeley a Newton[96].

A escolástica participou nesta busca de novos métodos através não só de Cavalieri, mas também dos trabalhos do jesuíta

---

[94] O caso $m = -1$ oferecia dificuldades especiais, só ultrapassadas quando a relação entre logaritmos e exponenciais foi claramente entendida.

[95] H. Bosmans, «Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal», in *Revue des Questions Scient.*, vol. 4, sér. 5, 1929, pp. 136-160 e 424-450; J. Guitton, *Pascal et Leibniz*, Paris, 1951.

[96] B. Pascal, *Œuvres*, Paris, 1908-14, vol. XII, p. 9; vol. XIII, pp. 141-155.

belga Grégoire de Saint-Vincent e dos seus alunos e associados, Paul Guldin e André Tacquet. Estes homens foram inspirados quer pelo espírito da sua época, quer pelos escritos da escolástica medieval sobre a natureza do contínuo e da latitude das formas. Nos seus escritos, o termo «exaustão» para o método de Arquimedes aparece pela primeira vez. O livro de Tacquet *Sobre Cilindros e Anéis* (1651, em latim) influenciou Pascal.

Esta ardente actividade dos matemáticos num período em que não existiam revistas científicas conduzia a círculos de discussão e a uma constante correspondência. Algumas figuras ganharam mérito por servirem como centro de intercâmbio científico. A mais conhecida delas é o padre menor Marin Mersenne, cujo nome como matemático é recordado nos «números de Mersenne». Com ele corresponderam-se Descartes, Fermat, Desargues, Pascal e muitos outros cientistas[97]. As academias formaram-se à volta dos grupos de discussão de homens cultos. Elas surgiram, de certo modo, em oposição às universidades, que mantinham o espírito do período escolástico —com algumas excepções, como a Universidade de Leida— e que protegiam a atitude medieval e fixista em relação ao conhecimento. As novas academias, pelo contrário, exprimiam o novo espírito de investigação. Como um escritor observa, elas simbolizavam

> esta idade ébria com a abundância dos novos conhecimentos, ocupada em extirpar as superstições antiquadas, libertando-se das maldições do passado, adoptando as esperanças mais extravagantes em relação ao futuro. Nelas, o cientista aprendeu a ficar satisfeito e orgulhoso por ter acrescentado uma parte infinitesimal ao conhecimento; aqui, em suma, desenvolveu-se o cientista moderno[98].

---

[97] *Informer Mersenne d'une découverte, c'était la publier par l'Europe entière*, escreve H. Bosmans (*op. cit.*, p. 43; «Informar Mersenne de uma descoberta significava publicá-la em toda a Europa»). O convento no qual Mercenne ensinou situava-se na actual Place des Vosges, em Paris, e aí acudiam os visitantes. «Le bon père Mersenne» morreu em 1648.

[98] M. Ornstein, *The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century*, Chicago, 1913, p. 262.

As primeiras academias do Renascimento foram fundadas em Itália; eram de natureza literária e filosófica. Uma academia científica, mencionada em Nápoles alguns tempos antes de 1580, antecipou a Academia dei Lincei (os linces têm uma visão aguçada), fundada em 1603 e ainda existente após várias interrupções. A Royal Society de Londres data de 1662, a Académie des Sciences, em França, de 1666. Wallis pertencia como membro efectivo à Royal Society e Huygens à Academia Francesa.

5

A seguir ao livro de Cavalieri, um dos mais importantes livros escritos neste período de antecipação é a *Arithmetica infinitorum* (1655), de Wallis. O autor, desde 1643 até à sua morte, em 1703, foi professor (Savilian) de Geometria em Oxford. O título do seu livro mostra que Wallis tencionava ultrapassar Cavalieri na sua *Geometria Indivisibilibus*; era a nova *arithmetica* (álgebra) que Wallis queria aplicar, não a antiga geometria. Neste processo, Wallis estendeu a álgebra numa verdadeira análise — foi o primeiro matemático a fazê-lo. Os seus métodos de relacionação com processos infinitários eram muitas vezes grosseiros, mas ele obteve novos resultados. Introduziu séries infinitas e produtos infinitos e usou com grande arrojo expoentes imaginários, negativos e fraccionários. Ele escreveu ∞ para $\frac{1}{0}$ (e sustentou que $-1 > \infty$). É característico dos seus resultados o desenvolvimento

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

assim como expressões equivalentes a integrais beta. Para aquilo que nós agora expressamos por $4/\pi$ ele escrevia um pequeno quadrado.

Wallis era apenas um de uma série de homens brilhantes deste período que enriqueceram a matemática com descobertas atrás

de descobertas. A força condutora deste florescimento da ciência criativa, apenas comparável aos grandes momentos da Grécia, só em parte se orientava para o manejo das novas técnicas. Tal como já se mencionou, muitos grandes pensadores procuravam mais: um «método geral» — por vezes considerado num sentido restrito, como um método da matemática, por vezes num sentido mais geral, como um método de compreender a natureza e de criar novas invenções. Esta é a razão pela qual, neste período, todos os grandes filósofos eram matemáticos e todos os grandes matemáticos eram filósofos. A procura de novas invenções levou muitas vezes directamente a descobertas matemáticas. Um exemplo famoso é o *Horologium oscillatorium* (1673), de Christiaan Huygens, onde a procura de melhores relógios (para que se resolvesse o antigo problema de determinar a longitude no mar) levou não só aos relógios de pêndulo, mas também ao estudo das evolutas e involutas de uma curva plana. Huygens, que era um holandês de boas famílias, viveu durante muitos anos em Paris. Era uma força condutora na Académie des Sciences, recentemente fundada[99]. Físico e astrónomo eminente, estabeleceu a teoria ondulatória da luz e descobriu que Saturno tinha um anel. O seu livro sobre relógios de pêndulo teve influência na teoria da gravitação de Newton; este livro, juntamente com a *Arithmetica*, de Wallis, representa a forma mais avançada do cálculo no período anterior a Newton e Leibniz. Nas cartas e livros de Wallis, Huygens e seus colegas abundam novas descobertas, rectificações, envolventes e quadraturas. Huygens estudou a tractriz, a curva logarítmica e a catenária e estabeleceu que a ciclóide era uma curva tautócrona. Apesar desta riqueza de resultados, muitos dos quais foram

---

[99] A Académie Française foi instituída por Richelieu em 1635, sendo a sua principal função a composição de um dicionário da língua francesa. Os seus 40 membros (entre os quais também se contavam cientistas) eram os «imortais». Esta Academia foi seguida por outras, entre as quais a Académie des Sciences (1666). Estas academias foram reorganizadas, na época da Revolução Francesa, no Institut National, ao qual pertence a Académie des Sciences.

encontrados depois de Leibniz ter publicado o seu cálculo, Huygens pertence claramente ao período de antecipação. Ele confessou a Leibniz que nunca tinha conseguido familiarizar-se com o seu método. Do mesmo modo, Wallis nunca se sentiu à vontade com a notação de Newton. Huygens foi um dos grandes matemáticos do século XVII que tomaram seriamente em conta o rigor; os seus métodos estavam sempre na linha da tradição arquimediana.

6

A actividade dos matemáticos deste período estendeu-se a muitos campos, novos e velhos. Enriqueceram os assuntos clássicos com resultados originais, lançaram novas luzes sobre campos antigos e criaram mesmo novos temas de pesquisa matemática. Um exemplo do primeiro caso foram os estudos de Fermat sobre Diofanto; um exemplo do segundo caso foi a nova interpretação da geometria por Desargues. A teoria matemática das probabilidades foi uma criação inteiramente nova.

Diofanto tornou-se acessível através de um texto publicado em latim em 1621[100]. Na cópia de Fermat desta tradução encontram-se as famosas notas marginais que seu filho publicou em 1670. Entre elas encontramos «o grande teorema de Fermat» segundo o qual $x^n + y^n = z^n$ é impossível para valores de inteiros positivos x, y, z, n se $n > 2$, o que, em 1847, levou Kummer à teoria dos números ideais. Uma prova válida para todos os inteiros n ainda não foi dada, embora o teorema seja certamente correcto para um grande número de tais valores[101].

---

[100] As primeiras traduções latinas: Euclides, 1482; Ptolomeu, 1515; Arquimedes, 1558; Proclo, 1560, Apolónio I-IV, 1566, V-VII, 1661; Papo, 1589: Diofanto, 1621.

[101] Ver P. Bachman, *Der Fermatsche Satz*, Berlim, 1919; H. S. Vandiver, *Amer. Math. Monthly*, vol. 53, 1946, pp. 555-578; O. Ore, *Number Theory and Its History*, Nova Iorque, 1948; L. J. Mordell, *Three Lectures on Fermat's Last Theorem*, Cambridge, 1921, reeditado em Berlim, 1972; H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Nova Iorque, 1974.

Fermat escreveu na margem, anotando Diofanto, II, 8: «Dividir um número ao quadrado em dois outros quadrados», as seguintes palavras:

> Dividir um cubo em dois outros cubos, uma quarta potência, ou, em geral, qualquer potência em duas potências do mesmo expoente acima da segunda é impossível, e eu encontrei uma prova admirável disto, mas a margem é muito estreita para a escrever.

Se Fermat tinha feito tal prova, três séculos de pesquisa intensa não conseguiram produzi-la outra vez. É mais seguro assumir que nem mesmo o grande Fermat acertava sempre.

Outra nota à margem de Fermat diz que um número primo da forma $4n + 1$ pode ser expresso de uma maneira, e só uma, como a soma de dois quadrados, o que foi demonstrado mais tarde por Euler. O outro «teorema de Fermat», que diz que $a^{p-1} - 1$ é divisível por p quando p é primo e a é primo em relação a p, aparece numa carta de 1640; este teorema pode ser demonstrado por métodos elementares. Fermat foi também o primeiro a afirmar que a equação $x^2 - Ay^2 = 1$ (A um inteiro, não quadrado) tem um número ilimitado de soluções inteiras (1657).

Fermat e Pascal foram os fundadores da teoria matemática das probabilidades. O gradual interesse em problemas relacionados com probabilidades foi devido primeiramente ao desenvolvimento dos seguros, mas as questões específicas que estimularam os grandes matemáticos a pensar neste assunto vieram dos pedidos de nobres que se entregavam a jogos de acaso, tal como os dados e as cartas. Nas palavras de Poisson: *Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l'origine du calcul des probabilités*[102]. Este «homem do mundo» era o Chevalier de Méré (um nobre de considerável erudição), que pôs a Pascal uma questão relacionada com o chamado *problème des points*. Pascal iniciou cor-

---

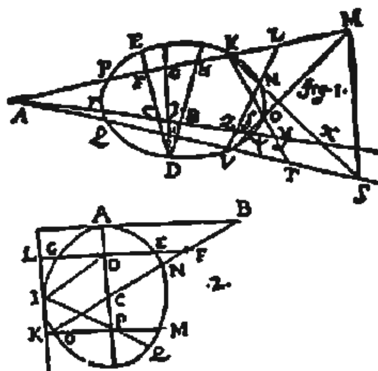
[102] «Um problema relativo aos jogos de acaso, proposto a um jansenista austero por um mundano, esteve na origem do cálculo das probabilidades.» (S. D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements*, Paris, 1837, p. 1.)

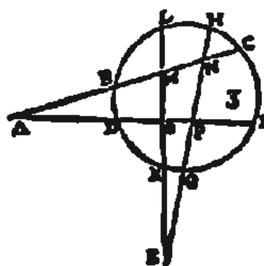


CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695)
(De uma gravura de Gerald Edelinch, um gravador flamengo, segundo um desenho do gravador francês Pierre Drevet)



BLAISE PASCAL (1623-1662)





ESSAY POVR LES CONIQVES. Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.



VAND plusieurs lignes droites concourent à mesme point, ou sont toutes paralleles entr'elles, toutes ces lignes sont dites de mesme ordre ou de mesme ordonnance; & la multitude de ces lignes, est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de section de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Elipse, l'Hyperbole, la Parabole & l'Angle rectiligne, d'autant qu'vn Cone coupé parallelement à sa base, ou par son sommet ou des trois autres sens qui engendrent l'Elipse, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la superficie Conique, ou la circonference d'vn Cercle ou vn Angle, ou l'Elipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

LEMM. I.

Figure. I. Si dans le plan, M, S, Q, du point M partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, soit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites, MV, SV, & A, le concours des droictes MA, SA, & μ, le concours des droictes MV, SK, & que par deux des quatre points, A K μ V, qui ne soient point en mesme droite avec les points, M, S, comme par les points, K, V, passe la circonference d'vn cercle coupante les droites MV, MP, SV, SK, ès points, O, P, Q, N, ie dis que les droites, MS, NO, PQ, sont de mesme ordre.

LEMM. II.

Si par la mesme droite passent plusieurs plans, qui soient coupez par vn autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de mesme ordre avec la droite par laquelle passent lesdits plans.

Fig. I. Ces deux Lemmes posez & quelques faciles consequences d'iceux nous demonstrerons que les mesmes choses estant posées qu'au premier Lemme, si par les points, K, V, passe vne quelconque section de Cone qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, ès points, P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de mesme ordre, & cela sera vn troisiéme Lemme.

En suitte de ces trois Lemmes & de quelques consequences d'iceux nous donnerons des Elemens Coniques complets, à sçavoir toutes les proprietez des diametres & costez droits, des tangentes &c. la restitution du Cone presque sur toutes les données, la description des sections de Cone par points, &c.

Fig. I. Quoy faisant, nous enonçons les proprietez que nous en touchons d'vne maniere plus universelle qu'à l'ordinaire. Par exemple celle cy, si dans le plan M S Q, dans la section de Cone, P K V, sont menées les droictes AK, AV, atteignantes la section aux poincts PK, QV, & que de deux de ces quatre poincts qui ne sont point en mesme droicte avec le poinct A, comme par les poincts K, V, & par deux poincts N, O, pris dans le bord de la section soient menées quatre droictes KN, KO, VN, VO, coupantes les droictes AV, AP, aux poincts L, M, T, S, ie dis que la raison composée des raisons de la droicte PM, à la droicte MA, & de la droicte AS, à la droicte SQ, est la mesme que la composée des raisons de la droicte PL, à la droicte LA, & de la droicte AT, à la droicte TQ.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi que s'il y a trois droictes DE, DG, DH, que les droictes AP, AR, coupent aux poincts F, G, H, C, γ, B, & que dans la droicte DC, soit determiné le poinct E, la raison composée des raisons du rectangle EF, en FG, au rectangle de EC, en Cγ, & de la droicte Aγ, à la droicte AG, est la mesme que la composée des raisons du rectangle EF, en FH, au rectangle EC, en CB, & de la droicte AB, à la droicte AH. Et est aussi la mesme que la raison du rectangle des droictes FE, FD, au rectangle des droictes, CE, CD. partant si par les poincts E, D, passe vne section de Cone qui coupe les droictes AH, AB, ès poincts P, K, R, ✝, la raison composée des raisons du rectangle des droictes EF, FC, au rectangle des droictes EC, Cγ, & de la droicte γA, à la droicte AG, sera la mesme que la composée des raisons du rectangle des droictes FK, FP, au rectangle des droictes CR, C✝, & du rectangle des droictes AR, A✝, au rectangle des droictes AK, AP.

Fig. III. Nous demonstrerons aussi que si quatre droictes AC, AF, EH, EL, s'entrecoupent ès poincts N, P, M, O, & qu'vne section de Cone coupe lesdites droictes ès poincts C, B, E, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du rectangle de MC, en MB, au rectangle des droictes PF, PD, & du rectangle des droictes AD, AF, au rectangle des droictes AB, AC, est la mesme que la raison composée des raisons du rectangle des droictes ML, MK, au rectangle des droictes PH, PG, & du rectangle des droictes EH, EG, au rectangle des droictes EK, EL.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi cette proprieté, dont le premier inventeur est Mr Desargues Lyonnois, vn des grands esprits de ce temps, & des plus versez aux Mathematiques, & entr'autres aux Coniques, dont les escripts sur cette matiere, quoy qu'en petit nombre, en ont donné vn ample tesmoignage à ceux qui en auront voulu recevoir l'intelligence: & veux bien advoüer que ie doibs le peu que i'ay trouvé sur cette matiere à ses escrits, & que i'ay tasché d'imiter autant qu'il m'a esté possible sa methode sur ce subject, qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe. Et traictant generalement de toutes les sections de Cone, la proprieté merveilleuse dont est question est telle: si dans le plan MSQ, y a vne section de Cone PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre poincts K, N, O, V, sont menées les droicts KN, KO, VN, VO, de sorte que par vn mesme des quatre poincts ne passent que deux droictes, & qu'vne autre droicte coupe tant l'abord de la section aux poincts R, ✝, que les droictes KN, KO, VN, VO, ès poincts x y Z δ, ie dis que comme le rectangle des droictes Zr, Z✝, est au rectangle des droictes γr, γ✝, ainsi le rectangle des droictes δr, δ✝, est au rectangle droictes xr, x✝.

Fig. II. Nous demonstrerons aussi que si dans le plan de l'hyperbole ou de l'elipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mene la droicte AB, touchante au poinct A, la section, & qu'ayant mené le diametre CA, on prend la droicte AB, dont le quarré soit égal au quart du rectangle de la figure, & qu'on mene CB, alors quelque droicte qu'on mene, comme DE, parallele à la droicte AB, coupante la section en E, & les droictes AC, CB, ès poincts DF, si la section AGE, est vne elipse ou vn cercle, la somme des quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB, & dans l'hyperbole la difference des mesmes quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB.

Nous deduirons aussi quelques problemes, par exemple d'vn poinct donné mener vne droicte touchante vne section de Cone donnée.

Trouver deux diametres coniuguez en angle donné.

Trouver deux diametres en angle donné & en raison donnée.

Nous avons plusieurs autres Problemes & Theoremes & plusieurs consequences des precedens, mais la defiance que i'ay de mon peu d'experience & de capacité ne me permet pas d'en avancer davantage devant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine; apres quoy si l'on iuge que la chose merite d'estre continuée, nous essayerons de la pousser iusques où Dieu nous donnera la force de la conduire.

A PARIS, M. DC. XL.

REPRODUÇÃO MUITO REDUZIDA DO FOLHETO QUE BLAISE PASCAL PUBLICOU EM 1640 SOBRE O SEU «TEOREMA DE PASCAL»

(Tal como apareceu em L. Brunschvicg e P. Boutroux, *Œuvres de Blaise Pascal*, 1908)

respondência com Fermat sobre este problema e sobre questões com ele relacionadas e ambos estabeleceram alguns dos fundamentos da teoria das probabilidades (1654). Quando Huygens veio a Paris, ouviu falar desta correspondência e tentou encontrar as suas próprias respostas; o resultado foi o *De ratiociniis in ludo aleae* (1657), o primeiro tratado sobre probabilidades baseado no conceito de esperança matemática[103]. Os passos seguintes foram dados por De Witt e Halley, que construíram tabelas de anuidades (1671, 1693).

Blaise Pascal era filho de Étienne Pascal, um correspondente de Mersenne; o «*limaçon* de Pascal» refere-se a Étienne. Blaise evoluiu rapidamente sob a tutela de seu pai e com 16 anos descobriu «o teorema de Pascal», que diz respeito a um hexágono inscrito num círculo. Foi publicado em 1641 numa única folha e revelava a influência de Desargues. Alguns anos mais tarde, Pascal inventou uma máquina de calcular. Com 25 anos resolveu levar uma vida ascética de jansenista no Convento de Port-Royal, mas continuou a dedicar tempo à ciência e à literatura. O seu tratado sobre «o triângulo aritmético» formado por coeficientes binomiais e útil para o cálculo das probabilidades surgiu postumamente, em 1664.

Já mencionámos o seu trabalho sobre integração e as suas especulações sobre infinitesimais, que influenciaram Leibniz. Foi também o primeiro a estabelecer uma formulação satisfatória do princípio da indução completa[104].

Gerard Desargues era um arquitecto de Lião e o autor de um livro sobre perspectiva (1636). O seu panfleto com o título curioso de *Brouillon projet d'une atteinte aux évènements des rencontres d'un cone avec um plan*[105] (1639) contém, numa

---

[103] H. Freudenthal, «Huygens' Foundation of Probability», in *H. M.*, vol. 7, 1980, pp. 113-117.

[104] H. Freudenthal, *Archives intern. des sciences*, vol. 22, pp. 17-37; R. Rashed, *AHES*, vol. 9, 1972, pp. 1-21.

[105] «Esboço de uma tentativa para relacionar os acontecimentos dos encontros de um cone com um plano.»

estranha linguagem botânica, algumas concepções fundamentais da geometria projectiva, tais como os pontos no infinito, involuções, polaridade. O «teorema de Desargues» sobre perspectiva de triângulos foi publicado em 1648. Estas ideias não revelaram a sua inteira fertilidade senão no século XIX.

7

Um método geral de diferenciação e integração, derivado da compreensão de que um processo é inverso do outro, somente pôde ser descoberto por homens que dominaram o método geométrico dos Gregos e de Cavalieri, assim como os métodos algébricos de Descartes e Wallis. Estes homens só poderiam ter aparecido depois de 1660, e na realidade surgiram com as figuras de Newton e Leibniz. Muito tem sido escrito acerca da prioridade da descoberta, mas está assente agora que ambos encontraram os seus métodos independentemente. Newton chegou primeiro ao cálculo (Newton em 1665-66 e Leibniz em 1673-76), mas Leibniz publicou-o primeiro (Leibniz, 1684-86; Newton, 1704-36). A escola de Leibniz foi de longe mais brilhante que a de Newton.

Isaac Newton era filho de um proprietário de terras de Lincolnshire, na Inglaterra. Estudou em Cambridge, tornou-se membro do Trinity College e em 1669 foi nomeado professor (Lucasian), sucedendo a Isaac Barrow. Newton ficou em Cambridge até 1696, quando aceitou o cargo de guardião e, mais tarde, de director da Casa da Moeda. Em 1705 foi feito cavaleiro pela rainha Ana e tornou-se Sir Isaac. A sua grande autoridade baseava-se na sua *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), um volume enorme que estabelecia a mecânica sobre uma fundamentação axiomática e continha a lei da gravitação — a lei que traz a maçã ao chão e mantém o movimento da Lua à volta da Terra. Demonstrou, por uma dedução matemática rigorosa, que as leis empíricas de Kepler sobre o movimento dos planetas se explicam por meio da lei gravitacional

dos inversos dos quadrados e deu uma explicação dinâmica de muitos aspectos do movimento dos corpos celestes e das marés. Resolveu o problema dos dois corpos para esferas e lançou as origens de uma teoria do movimento da Lua. Ao resolver o problema da atracção das esferas, fundamentou também a teoria do potencial. No seu tratamento axiomático postulava o espaço e o tempo absolutos.

A forma geométrica das demonstrações mal mostra que o autor estava na posse completa do cálculo a que ele chamava «teoria das fluxões». Newton descobriu o seu método geral durante os anos de 1665-66, quando permaneceu na sua terra natal, no campo, para fugir da peste que assolava Cambridge. Deste período datam também as suas ideias fundamentais sobre a gravitação universal, assim como a lei da composição da luz. «Não existem outros exemplos de realizações na história da ciência que se comparem às de Newton durante esses dois anos de ouro», observa o Prof. More[106].

A descoberta das «fluxões» por Newton estava intimamente ligada aos seus estudos sobre séries infinitas através da *Arithmetica*, de Wallis. Isso levou-o a estender o teorema do binómio a expoentes fraccionários e negativos e, assim, à descoberta das séries binomiais. Este facto ajudou-o a estabelecer a sua teoria das fluxões para «todas» as funções, algébricas ou transcendentes. Uma «fluxão», expressa por um ponto em cima de uma letra («letras marcadas»), era um valor finito, uma velocidade; as letras sem ponto representavam as «fluentes».

Eis um exemplo da maneira pela qual Newton explicou o seu método (*Method of Fluxions*, 1736): As variáveis de fluentes são representadas por $v, x, y, z, \ldots$ «e as velocidades pelas quais qualquer fluente varia pelo movimento gerador (que eu posso chamar *fluxões*, ou simplesmente velocidades, ou celeridades) represento-as pelas mesmas letras ponteadas: $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$». Os

---

[106] L. T. More, *Isaac Newton. A Biography*, Nova Iorque, Londres, 1934, p. 41. Ver também o livro do Westfall na bibliografia do final do capítulo.

infinitesimais de Newton eram chamados «momentos de fluxões» e eram representados por $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, sendo *o* «uma quantidade infinitamente pequena». Newton procede então do seguinte modo:

Dada uma equação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, substituindo x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$, obter-se-á

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o + axy + ay\dot{x}o + \\ + a\dot{x}o\dot{y}o + ax\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}oyo - \dot{y}^3o^3 = 0$$

Agora, por hipótese, $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, portanto, eliminando os termos remanescentes divididos por o, ficará

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2y + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + \\ + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - y^2oo = 0$$

Mas, visto que se supõe 0 infinitamente pequeno[107], para que possa representar momentos de quantidades, os termos que estão multiplicados por ele são insignificantes em relação aos outros; portanto, rejeito-os e fica

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

Este exemplo mostra que Newton pensava nas derivadas como sendo velocidades, mas também que existia uma certa imprecisão no seu modo de expressão. Os símbolos «*o*» são zeros? São infinitesimais? Ou são números finitos? Newton tentou tornar a sua posição clara pela teoria das «primeiras e últimas razões», que introduziu nos *Principia* e que envolvia o conceito de limite, mas de tal maneira que é muito difícil entendê-lo.

Essas razões últimas com as quais as quantidades se desvanecem não são verdadeiramente as razões das quantidades últimas, mas limites para os quais as razões das quantidades convergem, decrescendo sem cessar; e dos quais se aproximam mais que qualquer diferença dada, nunca indo além dos limi-

---

[107] No texto inglês está: *But whereas zero is supposed to be infinitely little. (N. do T.)*

tes, nem efectivamente os atingindo, até que as quantidades diminuam infinitamente. (*Principio* I, Sect. I, último escólio.)

As quantidades e as razões de quantidades que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade e, antes do final desse tempo, se aproximam umas das outras mais do que de qualquer diferença dada, tornam-se finalmente iguais. (*Principio* I, Sect. I, Lemma I.)

Isto estava longe de ser claro e as dificuldades que a compreensão da teoria das fluxões de Newton originava conduziram a muitas confusões e a uma crítica severa do bispo Berkeley, em 1734. Os equívocos não desapareceram até o conceito moderno de limite ter sido firmemente estabelecido.

Newton também escreveu sobre cónicas e curvas cúbicas planas. Em *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704) classificou as curvas cúbicas planas em vinte e duas espécies, baseando-se no seu teorema que afirma que qualquer cúbica pode ser obtida de uma «parábola divergente» $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ através de uma projecção central de um plano sobre outro. Este foi o primeiro resultado novo importante atingido pela aplicação da álgebra à geometria. Todos os trabalhos anteriores eram simplesmente traduções de Apolónio para uma linguagem algébrica. Outra contribuição de Newton foi o método para encontrar aproximações de raízes de equações numéricas, que ele explicou com o exemplo $x^3-2x-5=0$, conduzindo a $x = 2{,}09455147$.

A dificuldade em avaliar a influência nos seus contemporâneos repousa no facto de ele sempre ter hesitado em publicar as suas descobertas. Primeiro testou a lei da gravitação universal em 1665-66, mas não a anunciou até apresentar os manuscritos da maior parte dos *Principia* ao tipógrafo, em 1686. A sua *Arithmetica Universalis*, consistindo em lições sobre álgebra, proferidas entre 1673 e 1683, foi publicada em 1707. O seu trabalho sobre séries, que data de 1669, foi anunciado em duas cartas para Oldemburgo em 1676 e foi impresso em 1699. A quadratura das curvas, de 1693, não foi publicada até 1704; era a primeira vez que a teoria das fluxões era totalmente revelada

ao mundo. O seu trabalho mais antigo, *Method of Fluxions*, apareceu apenas em 1736, nove anos depois da sua morte. A influência dos *Principia* igualou-se à da *Opticks* (publicação em 1704 de um texto muito mais antigo). Com os trabalhos de Robert Boyle, influenciou toda a «filosofia experimental» do século XVIII.

8

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig e passou a maior parte da sua vida na corte de Hanôver, ao serviço dos duques, um dos quais se tornou rei de Inglaterra, sob o nome de Jorge I. Leibniz era ainda mais católico nos seus interesses que os outros grandes pensadores do seu século. A sua filosofia abrangia a história, a teologia, a linguística, a biologia, a geologia, a matemática, a diplomacia e a arte de inventar. Foi um dos primeiros, depois de Pascal, a inventar uma máquina de calcular. Imaginou máquinas de vapor, estudou filosofia chinesa e tentou promover a unidade da Alemanha.

A procura de um método universal através do qual pudesse obter conhecimentos, fazer invenções e compreender a unidade essencial do universo foi o principal objectivo da sua vida. A *scientia generalis* que queria construir tinha muitos aspectos e vários deles levaram Leibniz a descobertas na matemática. A procura de uma *characteristica generalis* levou-o a permutações, combinações e à lógica simbólica; a procura de uma *lingua universalis*, na qual todos os erros de raciocínio pudessem aparecer como erros computacionais, levou não só à lógica simbólica, mas também a muitas inovações na notação matemática. Leibniz foi um dos maiores inventores de símbolos matemáticos.

Poucos homens entenderam tão bem a unidade da forma e do conteúdo. A sua invenção do cálculo deve ser entendida nesta base filosófica; foi o resultado da procura de uma *lingua universalis* da mudança e do movimento em particular.



ISAAC NEWTON (1642-1727)
(De um retrato por Godfrey Kneller)



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)
(De um quadro da Galeria Uffizi, Florença)

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z-y+w+x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

OPENING OF LEIBNIZ'S FIRST PAPER ON THE CALCULUS, IN THE

Leibniz encontrou o seu novo cálculo entre 1673 e 1676, em Paris, sob a influência pessoal de Huygens e pelo estudo de Descartes e Pascal. Foi estimulado pelo conhecimento dos rumores de que Newton possuía tal método. Enquanto as abordagens de Newton foram basicamente cinemáticas, as de Leibniz foram geométricas. Pensava em termos do «triângulo característico» (*dx, dy, ds*), que já tinha aparecido noutros escritos, especialmente em Pascal e nas *Geometrical Lectures*, de Barrow, em 1670[108]. A primeira publicação do cálculo de Leibniz ocorreu em 1684, num artigo de seis páginas da *Acta eruditorum*, um jornal matemático que tinha sido fundado em 1682. O artigo tinha o título característico *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*[109].

Era uma descrição estéril e obscura, mas continha os nossos símbolos dx, dy e as regras de diferenciação, incluindo $d(uv) = udv + vdu$ e o diferencial para o quociente, com a condição $dy = 0$ para valores extremos e $d^2y = 0$ para pontos de inflexão. A este artigo seguiu-se outro, em 1686 (escrito na forma de recensão crítica), com as regras do cálculo integral contendo o símbolo $\int$. Expressava a equação da ciclóide como

$$y = \sqrt{2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Com a publicação destes artigos começou um período extremamente fértil da produtividade matemática. A Leibniz juntaram-se, depois de 1687, os irmãos Bernoulli, que absorveram

[108] O termo *triangulum characteristicum* parece ter sido usado pela primeira vez por Leibniz, que o encontrou através da leitura do *Traité des sinus du quart de cercle*, de Pascal, parte das suas cartas de Dettonville (1658). Também já tinha surgido em *Tiphys Batavus* (1624), de Snellius, pp. 22-25.

[109] «Um novo método para máximos e mínimos, assim como para tangentes, que não é obstruído pelo uso das quantidades fraccionárias ou irracionais, e uma curiosa espécie de cálculo para tal método.»

avidamente os seus métodos. Antes de 1700, estes homens tinham encontrado a maior parte do nosso cálculo elementar, juntamente com partes importantes de campos mais avançados, incluindo a solução de alguns problemas no cálculo das variações. Por volta de 1696 apareceu o primeiro texto sobre cálculo, a *Analyse des infiniment petits*, escrito pelo Marquis de l'Hospital sob a forte influência de Johann Bernoulli, que durante algum tempo o orientou. Este livro, durante muito tempo único no seu campo, contém a chamada «regra de l'Hospital» para encontrar o valor-limite de uma fracção cujos termos tendem simultaneamente para zero[110].

A nossa notação do cálculo é devida a Leibniz, assim como os nomes *calculus differentialis* e *calculus integralis*[111]. Devido à sua influência, o sinal = é usado para a igualdade e × para a multiplicação. Os termos «função» e «coordenadas» são devidos a Leibniz, assim como o curioso termo «osculação». Às séries

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

e

$$\tan^{-1} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

está associado o nome de Leibniz, embora ele não tenha a prioridade da descoberta. Parecem vir de James Gregory, um matemático de uma notável família escocesa de intelectuais e que,

---

110 Esta regra foi comunicada a L'Hospital por Johann Bernoulli, numa carta que apareceu apenas recentemente: J. Bernoulli, *Briefwechsel*, I, Basileia, 1955. (Sobre este assunto ver D. J. Struik, *Mathematics Teacher*, vol. 56, 1963, pp. 257-260.)

111 Leibniz sugeriu primeiro o nome de *calculus summatorius*, mas, em 1696, Leibniz e Johann Bernoulli concordaram com o nome de *calculus integralis*. A análise moderna voltou a usar a terminologia inicial de Leibniz. Ver ainda: F. Cajori, «Leibniz, The Master Builder of Mathematical Notations», in *Isis*, vol. 7, 1925, pp. 412-429.

depois de ter passado alguns anos (1664-68) no estrangeiro, principalmente em Pádua, ensinou em St. Andrews de 1668 até pouco antes da sua morte, quando tinha 37 anos. As suas cartas e os três livros que escreveu em Itália, entre eles as *Exercitationes Geometricae* (1668), revelam a sua grande originalidade em tratar processos infinitos. Encontrou a série binomial (1670) e em 1671 chegou à série de Taylor. Se tivesse vivido mais tempo, podia ser considerado, assim como Newton e Leibniz, um inventor do cálculo infinitesimal.

A explicação de Leibniz sobre os fundamentos do cálculo sofreu da mesma imprecisão que a de Newton. Algumas vezes, os seus *dx, dy* eram quantidades finitas, outras vezes quantidades menores que qualquer quantidade significativa, porém não nulas[112]. Na falta de definições rigorosas, apresentou analogias, apontando para a relação do raio da Terra com a distância das estrelas fixas. Variou os modos de tratar questões relacionadas com o infinito; numa das suas cartas (a Foucher, 1693) aceitou a existência do infinito actual para ultrapassar as dificuldades de Zenão e elogiou Grégoire de Saint Vincent, que tinha calculado o lugar onde Aquiles encontraria a tartaruga. Tal como a imprecisão de Newton provocou as críticas de Berkeley, também a imprecisão de Leibniz provocou a oposição de Bernard Nieuwentijt, burgomestre de Purmerend, próximo de Amesterdão (1694). As críticas de Berkeley e Nieuwentijt tinham a sua justificação, mas eram inteiramente negativas. Eram incapazes de fornecer uma fundamentação rigorosa do cálculo, mas inspiraram trabalhos construtivos posteriores.

---

[112] No texto inglês escreve-se: «quantities less than any assignable quantity and yet not zero.» *(N. do T.)*

As obras completas de Kepler, Galileu, Descartes, Pascal, Huygens, Fermat e Newton existem em edições modernas; as de Mersenne e Leibniz apenas em parte:

[Whiteside, D. T., e Hoskins, M. A. (eds.)], *Mathematical Papers of Isaac Newton*, 8 vols., Cambridge, 1976-81.

[—,] *The Mathematical Works of Isaac Newton*, 2 vols., Nova Iorque e Londres, 1964-67, com reproduções fac-similadas e introduções por Turnbull, H. W., e Scott.

[Koyré, A., Cohen, I. B., e Whitman, A. (eds.)], *Isaac Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Third Edition (1726) with Variant Readings*, 2 vols., Cambridge, Mass., e Cambridge, Inglaterra, 1972.

Newton, I., *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, trad. por A. Motte, 1728. Ed. e introd. por I. B. Cohen, 2 vols., Londres, 1968.

Turnbull, H. W., *The Mathematical Discoveries of Newton*, Glasgow, 1934.

More, L. T., *Isaac Newton. A Biography,* Nova Iorque e Londres, 1934.

Westfall, R. S., *Never at Rest. A Biography of I. Newton*, Nova Iorque, etc., 1981.

Sheynin, O. B., «Newton and the Classical Theory of Probability», in *AHES* vol. 7, 1971, pp. 217-256.

Ver também o extenso artigo de I. B. Cohen em *DSB*, vol. 10, 1974, pp. 42-103, que contém informações sobre Newton na URSS.

A Deutsche Akademie der Wissenschaften, de Berlim, está publicando o *Sämtliche Schriften und Briefe* (1923), de Leibniz, mas não abrange ainda os trabalhos matemáticos. Encontramo-los em:

[Gerhardt, C. I., (ed.)], *G. W. Leibniz' mathematische Schriften,* 7 vols., Berlim e Halle, 1849-63; reeditado em Hildesheim, 1962. («Register» [Index] por J. E. Hofmann, Hildesheim, 1977.)

Child, J. M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz,* Chicago, 1920 (traduzido dos originais em latim).

Couturat, L., *La Logique de Leibniz*, Paris, 1901.

—, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris, 1906; reeditado em Hildesheim, 1961.

Knobloch, E., *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*, 2 vols., Wiesbaden, 1973, 1976.

Leibniz à Paris, Studia Leibnitziana Supplementa 18, vol. 2, 1978, 371 pp. (treze ensaios).

Hofmann, J. E., *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizchen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris*, 1672-1676, Munique, 1949. Ver, relativamente a estes dois livros, *HM*, vol. 9, 1982, pp. 109-123. (Outros estudos de Hofmann sobre os matemáticos do século XVII incluem aqueles sobre N. Mercator (*Deut. Math.*, vol. 3, 1939; vol. 5, 1940); Grégoire de Sain-Vincent (*Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math. Naturw. Klasse*, n.° 31, 1941); Fermat (*ibid.*, n.° 7, 1944); e sobre a questão da prioridade de Newton ou Leibniz (*ibid.*, n.° 2, 1944). Cf. os dados bibliográficos no seu *Geschichte der Mathematik*, 3 vols., Berlim, 1953-57. Também *Frans van Schooten der Jüngere*, Wiesbaden, 1962.

Ver também sobre Leibniz o artigo de J. E. Hofmann, *DSB*, vol. 8, 1973, pp. 149-168. «Aus den Frühzeit der Infinitesimalmethoden», in *AHES*, vol. 2, 1964, pp. 271-343.

Muita bibliografia por C. J. Scriba in *Mitt. aus dem math. Seminar Giessen*, 1971, pp. 51-73, e *HM*, vol. 2, 1975, pp. 148-152.

Sobre a descoberta do cálculo ver:

Boyer, C. B., *The History of the Calculus*, Nova Iorque, 1949. Reedição da Dover, 1959. (Contém muita bibliografia.)

Sobre o ambiente histórico e técnico ver:

Grossman, H., «Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophie und die Manufaktur», in *Zeitschrift für Sozialforschung*, vol. 4, 1935, pp. 161-231.

Merton, R. K., «Science, Technology and Society in the Seventeenth Century», in *Osiris*, vol. 4, 1938, pp. 360-362; também *Science and Society*, vol. 3, 1939, pp. 3-27.

Sobre os principais matemáticos ver:

Cajori, F., *William Oughtred*, Chicago e Londres, 1916.

Scott, J. F., *The Mathematical Works of John Wallis D. D., F. R. S.*, Londres, 1938. Reeditado em Nova Iorque, 1981.

Prag, A., «John Wallis, Zur Ideengeschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert», in *Quellen und Studien*, vol. 1, 1930, pp. 381-412. (Ver também T. P. Nunn, *Math. Gazette*, vol. 5, 1910-11.)

Hessen, B., «The Social and Economic Roots of Newton's *Principia*», in *Science at the Crossroads*, Londres, 1934.

Scriba, C. J., «Studien zur Mathematik des John Wallis (1616-1703)», in *Boethius*, vols. 6 e 7, Wiesbaden, 1966.

Mahoney, M. S., *The Mathematical Career of Pierre Fermat*, Princeton, N. J., 1970.

Barrow, I., *Geometrical Lectures*, Chicago, 1916. (Trad. e ed. por J. M. Child.)

Bell, A. E., *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*, Londres, 1947.

Johann Kepler. A Tercentenary Commemoration of His Life and Works, Baltimore, 1931.

Milhaud, G., *Descartes savant*, Paris, 1921.

Bosmans, H. (ver cap. v), tem artigos sobre: Tacquet (*Isis*, vol. 9, 1927-28, pp. 66-83), Stevin (*Mathesis*, vol. 37, 1923; *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, vol. 37, 1913, pp. 171-199; *Biographie nationale de Belgique)*, Della Faille (*Mathesis*, vol. 41, 1927, pp. 5-11), De Saint Vincent (*Mathesis*, vol. 38, 1924, pp. 250-256).

Toeplitz, O., *Die Entwicklung der Infinitesimalrecknung I*, Berlim, 1949.

Taton, R., *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris, 1951.

James Gregory, A Tercentenary Memorial, H. W. Turnbull, ed. Londres, 1939. (Cf. M. Dehn e E. D. Hellinger, *Amer. Math. Monthly*, vol. 50, 1943, pp. 149-163.)

Scriba, C. J., *James Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung*, Mitt. aus dem math. Seminar Giessen, 55, 1957, 80 pp.

Haas, K., «Die mathematischen Arbetein von Johannes Hudde», in *Centaurus*, vol. 4, 1956, pp. 235-284.

Fellman, E. A., «Die mathematischen Werke von Honoratius Fabri», in *Physis,* vol. 1, 1959, pp. 1-54.

Whiteside, D. T., «Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century», in *AHES*, vol. 1, 1961, pp. 179-388.

Tannery, Paul, «Notions Historiques», in *Notions de mathématiques*, J. Tannery (ed.), Paris, 1903, pp. 324-348.

Montel, P., *Pascal mathématicien*, Paris, 1951.

Fleckenstein, J. O., *Die Prioritätsstreit zwischein Leibniz und Newton*, Basileia e Estugarda, 1956.

Lohne, J. A., «Thomas Harriot als Mathematiker», in *Centaurus*, vol. 11, 1965, pp. 19-45; também *DSB*, vol. 6, 1972, pp. 124-129.

Bos, H. J. M., «Differentials, Higher-order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus», in *AHES*, vol. 14, 1974, pp. 1-90.

[Smith, D. E., e Latham, H. (eds.)], *The Geometry of René Descartes*, texto fac-símile com tradução em inglês, Chicago, 1925, reeditado em Nova Iorque, 1959.

Hall, A. R., *Philosophers at War. The Quarrel Between Newton and Leibniz,* Cambridge, 1900.

Struik, D. J., *The Land of Stevin and Huygens*, Dordrecht, 1981. Trad. do holandês, Amesterdão, 1958, Nijmegen, 1979.

Taton, R., «L'œuvre de Pascal en Géométrie Projective», in *Rev. Hist. Science Appl.*, vol. 15, 1962, pp. 197-252.
Mulcrone, T. E., «A Catalog of Jesuit Mathematicians», in *Bull. Amer. Assoc. Jesuit Scientists, Eastern States Division*, vol. 41, 1964, pp. 83-90.
Auger, L., *Un savant méconnu, Giles Personne de Roberval, 1602-1675*, Paris, 1962.
Dugas, R., *La mécanique au XVIIe siècle*, Neuchâtel, 1954.
Baron, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Nova Iorque, 1969.

CAPÍTULO VII

O século XVIII

1

A produtividade matemática no século XVIII concentrava-se no cálculo e nas suas aplicações à mecânica. As maiores figuras podem ser ordenadas numa espécie de filiação para indicar as suas afinidades intelectuais:

Leibniz (1646-1716);
Os irmãos Bernoulli: Jakob (1654-1705), Johann (1667-1748);
Euler (1707-1783);
Lagrange (1736-1813);
Laplace (1749-1827).

Estava intimamente relacionada com os trabalhos destes homens a actividade de um grupo de matemáticos franceses, especialmente Clairaut, d'Alembert e Maupertuis, os quais, por sua vez, estavam ligados aos filósofos do iluminismo. A estes nomes devem ser acrescentados os dos matemáticos suíços Lambert e Daniel Bernoulli. A actividade científica centrava-se geralmente nas academias, das quais se destacavam as de Paris, Berlim e Sampetersburgo. O ensino universitário desempenhava um papel menor ou mesmo nulo. Era um período no qual alguns

dos principais estados europeus eram governados por aqueles que têm sido chamados, eufemisticamente, déspotas iluminados: Frederico-o-Grande, Catarina-a-Grande, aos quais podemos acrescentar Luís XV e Luís XVI. Alguns destes déspotas aspiravam à glória e, para seu prazer, rodeavam-se de homens cultos. Este prazer era uma espécie de snobismo intelectual, temperado por uma certa compreensão do papel importante que as ciências naturais e as matemáticas aplicadas desempenhavam na modernização das manufacturas e no aumento de eficácia da força militar. Diz-se, por exemplo, que a perfeição da armada francesa se devia ao facto de, na construção de fragatas e barcos de linha, os mestres de construção naval terem sido guiados, em parte, pela teoria matemática. Os trabalhos de Euler eram ricos em aplicações a questões importantes para o exército e a marinha. A astronomia continuou a desempenhar um papel de destaque como mãe adoptiva da investigação matemática sob a protecção real e imperial.

2

Basileia, na Suíça, uma cidade imperial livre desde 1263, tinha sido durante muito tempo um centro de estudo. Na época de Erasmo, a sua universidade já era um grande centro. As artes e as ciências floresciam em Basileia, assim como nas cidades da Holanda, sob o domínio de uma aristocracia mercantil. A esta aristocracia de Basileia pertencia a família mercantil dos Bernoulli, que tinha vindo de Antuérpia via Amesterdão, no século anterior, após a conquista da cidade pelos Espanhóis. Desde os finais do século XVII até à época actual, esta família tem produzido cientistas em todas as gerações. Na realidade, é difícil encontrar na história da ciência uma família com um passado tão distinto.

Esta história começou com dois matemáticos, Jakob (James, Jacques) e Johann (John, Jean) Bernoulli. Jakob estudou Teologia, Johann estudou Medicina; mas, quando surgiram os tex-

tos de Leibniz na *Acta eruditorum*, os dois homens decidiram tornar-se matemáticos. Foram os primeiros alunos importantes de Leibniz. Em 1687, Jakob aceitou a cadeira de Matemática na Universidade de Basileia, onde ensinou até à sua morte, em 1705. Em 1695 Johann tornou-se professor em Groninga; depois da morte de seu irmão mais velho sucedeu-lhe em Basileia, onde permaneceu durante quarenta e três anos.

Jakob começou a sua correspondência com Leibniz em 1687. Então, numa troca constante de ideias com Leibniz e entre irmãos —muitas vezes com uma rivalidade amarga entre eles—, os dois Bernoulli começaram a descobrir os tesouros existentes nos trabalhos precursores de Leibniz. A lista dos seus resultados é longa e inclui não só muito do material agora existente nos nossos textos elementares sobre cálculo diferencial e integral, mas também material sobre a integração de muitas equações diferenciais ordinárias. Entre as contribuições de Jakob encontram-se o uso de coordenadas polares, o estudo da catenária (já discutida por Huygens e outros), da lemniscata (1694) e da espiral logarítmica. Em 1690 encontrou a chamada «isócrona», proposta por Leibniz em 1687 como a curva ao longo da qual um corpo cai com velocidade uniforme; aparecia como uma parábola semicúbica. Jakob também discutiu as figuras isoperimétricas (1701), o que o conduziu a um problema de cálculo das variações. A espiral logarítmica, que se reproduz a si própria através de várias transformações (a sua evoluta é uma espiral logarítmica, tal como a curva pedal e a cáustica em relação ao pólo), deleitava de tal forma Jakob que ele desejou que a curva fosse gravada no seu túmulo com a inscrição *eadem mutata resurgo*[113].

Jakob Bernoulli foi também um dos primeiros a estudar a teoria das probabilidades, sobre o que escreveu a *Ars conjectandi*, publicada postumamente, em 1713. Na primeira parte deste livro

---

[113] «Ressurjo a mesma, embora mudada.» A espiral no túmulo, porém, mais parece uma espiral arquimediana.

é reeditado o trabalho de Huygens sobre jogos de azar; as outras partes relacionam-se com permutações e combinações e atingem o máximo no «teorema de Bernoulli» sobre distribuições binomiais. Os «números de Bernoulli» surgem neste livro na discussão do triângulo de Pascal.

3

Johann Bernoulli, doze anos e meio mais novo que o seu irmão, viveu até aos 80 anos, elevando-se do seu lugar de Basileia —e não sem altercações— à posição de uma espécie de velho senhor do mundo matemático, orgulhoso, porém, do seu único aluno, Leonhard Euler. O seu trabalho estava intimamente ligado com o do irmão, mais velho, e nem sempre é fácil distinguir entre os resultados de um e de outro. Ambos, Jakob e Johann, são muitas vezes considerados os inventores do cálculo das variações em virtude da sua contribuição para o problema da braquistócrona. Ela é a curva de descida mais rápida para um ponto material que se move entre dois pontos dados, num campo de gravidade. Foi estudada por Leibniz e pelos irmãos Bernoulli em 1697 e nos anos seguintes. Neste período encontraram a equação das geodésicas sobre uma superfície[114]. A resposta ao problema da braquistócrona é a ciclóide. Esta curva também resolveu o problema da tautócrona, a curva ao longo da qual um ponto material, num campo gravitacional, chega ao ponto mais baixo num tempo independente do ponto de partida. Huygens descobriu esta propriedade da ciclóide e usou-a na construção de relógios pendulares tautócronos (1673), nos quais o período é independente da amplitude.

Entre os outros Bernoulli que influenciaram o rumo da matemática salienta-se o filho de Johann, Daniel. Depois de perma-

[114] Newton, num *scholium* dos *Principia* (II, prop. 35), já tinha discutido o sólido de revolução que, ao mover-se num líquido, oferece menor resistência. Não foi publicada por ele nenhuma prova a esse respeito.

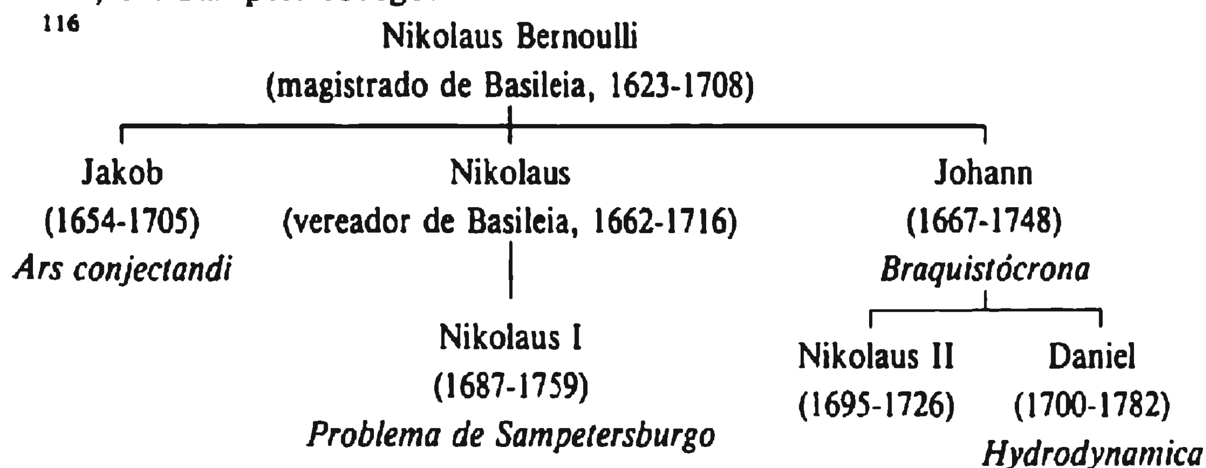
necer em Sampetersburgo entre 1725 e 1733, a partir de 1727 com Euler, torna-se professor em Basileia, onde viveu até uma idade avançada. Nos primeiros anos colaborou com o seu primo Nikolaus (I) no problema de probabilidades conhecido como problema (ou, mais dramaticamente, como «paradoxo») de Sampetersburgo porque o trabalho fora publicado nessa cidade[115]. A sua prolífica actividade centrou-se nas aplicações (chamadas «matemáticas mistas»): astronomia, física, fisiologia e hidrodinâmica, um termo que lhe é devido. A *Hydrodinamica* (1736) contém a lei da pressão hidráulica de Bernoulli e, no cap. 16, os princípios da teoria cinética dos gases. Esta obra inspirou Euler no seu trabalho fundamental sobre a dinâmica dos fluidos. Com Euler e d'Alembert, Daniel estudou a teoria das cordas vibrantes, introduzida primeiramente por Brook Taylor (1715). Esta questão conduziu à teoria das equações diferenciais parciais, com alguma controvérsia, especialmente em relação ao papel das séries trigonométricas, introduzidas aqui pela primeira vez.

As equações diferenciais ordinárias tinham sido o domínio do pai e do tio de Daniel. Outro filho de Johann, Johann (II), e dois filhos deste Johann, Johann (III) e Jakob (II), também tiveram carreiras notáveis nas matemáticas. E não foram eles os únicos membros desta família com carreiras académicas[116].

---

[115] *Comm. Acad. Scient. Imp. Petropolitanae,* vol. 5, 1730-31, publ. 1738. Foi seguindo o nome desta publicação que o problema foi chamado, e não, como algumas vezes se pensou, depois da estada de Nikolaus (II), irmão de Daniel, em Sampetersburgo.

[116]



Também de Basileia surgiu o matemático mais produtivo do século XVIII —se não de todos os tempos—, Leonhard Euler. O seu pai estudou matemática com Jakob Bernoulli e Leonhard com Johann. Quando, em 1725, Nikolaus, filho de Johann, viajou para Sampetersburgo, o jovem Euler seguiu-o e ficou na Academia até 1741. De 1741 a 1766, Euler esteve na Academia de Berlim sob a protecção de Frederico-o-Grande; de 1766 a 1783 esteve novamente em Sampetersburgo, agora sob a égide da imperatriz Catarina. Casou-se duas vezes e teve treze filhos. A vida deste académico do século XVIII foi quase exclusivamente dedicada ao trabalho nos diferentes campos da matemática, pura e aplicada. Embora tivesse perdido um olho em 1735 e o outro em 1766, nada podia interromper a sua enorme produtividade. Euler, cego, ajudado por uma memória fenomenal, continuou a ditar as suas descobertas. Durante a sua vida escreveu 560 livros e artigos; à sua morte deixou muitos manuscritos, que foram publicados pela Academia de Sampetersburgo durante os quarenta e sete anos seguintes. (Isto elevou o número dos seus trabalhos a 771, mas Gustav Eneström, nas suas buscas, completou a lista, chegando a 886, mais 31 trabalhos do seu filho mais velho, Johann Albrecht, escritos sob a supervisão do pai— sem contar com uma extensa correspondência.)

Euler deu contribuições notáveis em todos os campos da matemática existentes naquele tempo. Publicou os seus resultados não só em artigos de extensão variável, mas também num número impressionante de longos tratados, em que ordenou e codificou material coligido durante anos. Em vários campos, a apresentação feita por Euler adquiriu a sua forma quase definitiva. Um exemplo é a nossa trigonometria actual, com as suas concepções de valores trigonométricos, como razões, e sua útil notação, que data da *Introductio in analysin infinitorum* (1748), de Euler. O grande prestígio dos seus textos resolveu para sempre muitas questões controversas sobre a notação na álgebra e no

cálculo infinitesimal; Lagrange, Laplace e Gauss conheceram e seguiram Euler em todos os seus trabalhos.

A *Introductio* de 1748 cobre em dois volumes uma grande variedade de assuntos. Contém uma exposição sobre séries infinitas, incluindo as de e^x, sen x e cos x, e apresenta a relação $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ (já descoberta por Johann Bernoulli e por outros, em formas diferentes). Curvas e superfícies foram tão facilmente investigadas com a ajuda das suas equações que podemos considerar a *Introductio* o primeiro texto de geometria analítica. Podemos também encontrar aí uma teoria algébrica da eliminação.

As partes mais excitantes deste livro são os capítulos sobre a função zeta e a sua relação com a teoria dos números primos e o capítulo sobre *partitio numerorum*[117].

Institutiones calculi differentialis (1755), seguido por três volumes de *Institutiones calculi integralis* (1768-74), são outros grandes e ricos textos de Euler. Nestes livros encontramos não só os nossos cálculos diferencial e integral elementares, mas também uma teoria das equações diferenciais, o teorema de Taylor com muitas aplicações, a fórmula da «soma» de Euler e os integrais Γ e B de Euler. O capítulo sobre equações diferenciais, com a distinção entre equações «lineares», «exactas» e «homogéneas», é ainda o modelo dos nossos textos elementares sobre este assunto. Euler também refinou o conceito de *função*.

A *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita* (1736), de Euler, foi o primeiro texto no qual a dinâmica newtoniana do ponto material foi desenvolvida com métodos analíticos. Seguiu-se a *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765), na qual a mecânica dos corpos sólidos estava tratada de uma forma semelhante. Este texto contém as «equações de Euler» para um corpo que gira à volta de um ponto. Estes livros estabelecem a mecânica racional na forma que nos é

[117] Ver o prefácio à *Introductio* por A. Speiser: Euler, *Opera omnia,* 1.ª série, vol. 9, 1945.

conhecida através dos nossos textos, enquanto a sua fonte de inspiração, os *Principia*, de Newton, foi deixada aos especialistas de história da ciência. O *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) —ditado por Euler e, devido à sua cegueira, escrito em alemão por outrem— foi o modelo de muitos textos posteriores sobre álgebra. Este livro compreende a teoria das equações cúbicas e biquadráticas e termina com um capítulo sobre equações indeterminadas, no qual encontramos as demonstrações de que $x^n + y^n = z^n$ é impossível para inteiros $x, y, z, n = 3$ e $n = 4$ (ver cap. VI, secção 6, atrás, sobre o problema de Fermat).

Em 1744 surgiu o *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, de Euler. Foi a primeira exposição sobre o cálculo das variações. Continha as «equações de Euler» com muitas aplicações, incluindo a descoberta de que a catenóide e a helicóide direita eram superfícies mínimas. Muitos outros resultados de Euler podem ser encontrados nos seus artigos mais pequenos, que contêm várias preciosidades, mas são pouco conhecidos hoje em dia. Às descobertas mais conhecidas pertencem: o teorema que relaciona o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de um poliedro fechado ($V + F - A = 2$)[118]; a linha de Euler no triângulo; as curvas de amplitude constante (Euler chamou-lhes curvas orbiformes); e a constante de Euler

$$\lim_{(n \to \infty)} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772156\ldots$$

Vários textos são dedicados a passatempos matemáticos (as sete pontes de Königsberg, o movimento do cavalo no xadrez). As contribuições de Euler para a teoria dos números, por si só, podiam ter-lhe dado a fama; pertence às suas descobertas neste campo a lei da reciprocidade para resíduos quadráticos.

---

[118] Já conhecido por Descartes, *Œuvres* (C. Adam e P. Tannery, eds.), vol. X, pp. 257-276.

Uma grande parte da actividade de Euler foi dedicada à astronomia, onde a teoria lunar, importante quer como uma parte do problema dos três corpos, quer na solução do problema do cálculo da longitude, recebeu a sua especial atenção. A *Theoria motus planetarum et cometarum* (1774) é um tratado de mecânica celeste. O estudo de Euler sobre a atracção de elipsóides (1738) relaciona-se com este trabalho.

Existem livros de Euler sobre hidráulica, sobre construções de barcos e sobre artilharia. De 1769 a 1771 apareceram três volumes de uma *Dioptrica* com uma teoria da passagem de raios de luz através de um sistema de lentes. Em 1739 surgiu a sua nova teoria da música, da qual se tem dito que é demasiado musical para matemáticos e demasiado matemática para músicos. A exposição filosófica de Euler sobre os problemas mais importantes das ciências naturais, nas suas *Cartas a Uma Princesa Alemã* (1760-61, em francês) permanece um modelo de divulgação.

A enorme fertilidade de Euler tem sido uma fonte contínua de surpresa e admiração para todos aqueles que têm tentado estudar os seus trabalhos, uma tarefa não tão difícil como parece, pois o latim de Euler é muito simples e a sua notação é quase moderna — ou talvez devêssemos dizer que a nossa notação é quase a de Euler! Pode ser feita uma longa lista sobre as descobertas conhecidas, para as quais Euler possuirá a prioridade, e outra sobre ideias que ainda hoje mereceriam elaboração. Grandes matemáticos têm sempre referido aquilo que devem a Euler. «Lisez Euler», costumava dizer Laplace aos matemáticos mais jovens, «lisez Euler, c'est notre maître à tous». Gauss, mais moderadamente, dizia: «O estudo dos trabalhos de Euler continuará a ser a melhor escola para os diferentes campos da matemática e nada os poderá substituir.» Riemann conhecia bem os trabalhos de Euler e alguns dos seus escritos mais profundos têm um toque euleriano. Os editores deviam esforçar-se por oferecer traduções dos trabalhos de Euler juntamente com comentários modernos.

Secantes autem et cosecantes ex tangentibus per solam subtractionem inveniuntur; est enim

$$\text{cosec.}\, z = \cot.\frac{1}{2}z - \cot.\, z$$

et hinc

$$\sec.\, z = \cot.\left(45^\circ - \frac{1}{2}z\right) - \text{tang.}\, z.$$

Ex his ergo luculenter perspicitur, quomodo canones sinuum construi potuerint.

138. Ponatur denuo in formulis § 133 arcus z infinite parvus et sit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$ et $z = \frac{v}{i}$, unde $\sin.\, z = \frac{v}{i}$ et $\cos.\, z = 1$; his substitutis fit

$$\cos.\, v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

atque

$$\sin.\, v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

In capite autem praecedente vidimus esse

$$\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

denotante e basin logarithmorum hyperbolicorum; scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit

$$\cos.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

et

$$\sin.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ex quibus intelligitur, quomodo quantitates exponentiales imaginariae ad sinus et cosinus arcuum realium reducantur.[1]) Erit vero

1) Has celeberrimas formulas, quas ab inventore *Formulas Eulerianas* nominare solemus, Eulerus distincte primum exposuit in Commentatione 61 (indicis Eneströmiani): *De summis*

AS PÁGINAS DA *INTRODUCTIO*, DE EULER, EM QUE SE APRESENTA A FÓRMULA $e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$

(Tirado de uma reprodução posterior do texto de 1748. A fórmula de Euler foi publicada em 1743, ou mesmo mais cedo, nas cartas de 1741 e 1742 dirigidas a Goldbach)

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \cdot \sin. v$$

et

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \cdot \sin. v.$$

139. Sit iam in iisdem formulis § 133 n numerus infinite parvus seu $n = \frac{1}{i}$ existente i numero infinite magno; erit

$$\cos. nz = \cos. \frac{z}{i} = 1 \quad \text{et} \quad \sin. nz = \sin. \frac{z}{i} = \frac{z}{i};$$

arcus enim evanescentis $\frac{z}{i}$ sinus est ipsi aequalis, cosinus vero $= 1$. His positis habebitur

$$1 = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^{\frac{1}{i}} + (\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

et

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^{\frac{1}{i}} - (\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Sumendis autem logarithmis hyperbolicis supra (§ 125) ostendimus esse

$$l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i \quad \text{seu} \quad y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i} ly$$

posito y loco $1 + x$. Nunc igitur posito loco y partim $\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z$ partim $\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z$ prodibit

---

seriereum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum, Miscellanea Berolin. 7, 1743, p. 172; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 14. Iam antea quidem cum amico CHR. GOLDBACH (1690—1764) formulas huc pertinentes, partim speciales partim generaliores, communicaverat. Sic in epistola d. 9. Dec. 1741 scripta invenitur haec formula

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \text{Cos. Arc. } l\,2$$

et in epistola d. 8. Maii 1742 scripta haec

$$a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2 \text{ Cos. Arc. } pla.$$

Vide *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 110 et 123; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series III. Confer etiam Commentationem 170 nota 1 p. 35 laudatam, imprimis § 90 et 91. A. K.

É importante realçar não só algumas contribuições de Euler para a ciência, mas também algumas das suas fraquezas. Os processos infinitos eram ainda manejados com descuido no século XVIII e muitos dos trabalhos dos principais matemáticos deste período impressionam-nos pela experimentação descontroladamente entusiástica. Experimentava-se com séries infinitas, com produtos infinitos, com a integração, com o uso de símbolos tais como 0, ∞, $\sqrt{-1}$. Se, actualmente, muitas das conclusões de Euler podem ser aceites, existem outras às quais devemos pôr reservas. Aceitamos, por exemplo, a afirmação de Euler de que log *n* tinha uma infinidade de valores que são todos números complexos, excepto quando *n* é positivo, em que um dos valores é real. Euler chega a esta conclusão numa carta escrita a d'Alembert (1747), que tinha afirmado que $\log(-1) = 0$. Mas não podemos seguir Euler quando ele escreve que $1 - 3 + 5 - 7 + \ldots = 0$, ou quando conclui de

$$n + n^2 + \ldots = \frac{n}{1-n}$$

e

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{n}{n-1}$$

que

$$\ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \ldots = 0$$

Temos no entanto de ser cuidadosos e não criticar precipitadamente Euler pela forma como trata séries divergentes; de facto, Euler nem sempre usa os nossos testes actuais de convergência e divergência como um critério para a validade destas séries. Os matemáticos modernos têm dado a muitos dos seus trabalhos com séries, que se supuseram imprecisos, um sentido estritamente rigoroso[119]. Não podemos, porém, ser entusiásti-

[119] «Não devemos — como tem sido feito muitas vezes, especialmente nos finais do século XIX — falar de falta de rigor quando tratamos com métodos de matemáticos do passado que podemos manejar de uma forma satisfatória

cos com a maneira de Euler basear o cálculo na introdução de zeros de ordens diferentes. Uma quantidade infinitamente pequena, escreve Euler no seu *Cálculo Diferencial*, de 1755, é na verdade zero, $a \pm ndx = a$[120], $dx \pm (dx)^{n+1} = dx$ e $a\sqrt{dx} + Cdx = a\sqrt{dx}$.

> Portanto, existem ordens infinitas de quantidade infinitamente pequenas, que, embora sejam todas = 0, ainda têm de ser distinguidas entre si, se tivermos em conta a sua relação mútua, que é explicada por uma razão geométrica[121].

Toda a questão da fundamentação do cálculo permaneceu um assunto de debate, assim como todas as questões relacionadas com processos infinitos. O período «místico» da fundamentação do cálculo (usando o termo sugerido por Karl Marx) provocou um misticismo que por vezes ultrapassou o dos seus fundadores. Guido Grandi, padre e professor em Pisa, conhecido pelo seu estudo das rosáceas (r = sen $n\theta$) e de outras curvas semelhantes a flores[122], considerou a fórmula

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots \\ &= 0 + 0 + 0 + \ldots\end{aligned}$$

---

com a ajuda de técnicas adquiridas ao longo do tempo. Devemos falar apenas de falta de rigor quando algum resultado tenha sido obtido por raciocínios que não possam ser sustentados logicamente.» [«Introdução a Euler», in *Opera omnia*, C. Carathéodory (ed.), 1.ª série, vol. 24, 1952, p. XVI.] Sobre Euler e as séries divergentes ver também G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, 1949.

[120] Esta fórmula recorda-nos uma afirmação atribuída a Zenão por Simplício: «Aquele que, sendo adicionado a outro, não o torna maior e, diminuído dele, não o torna menor é nulo.»

[121] Euler, *Opera omnia*, 1.ª série, vol. 10, p. 72. A reacção da maior parte dos matemáticos tem sido —e ainda é— que mesmo o grande Euler errou por vezes. O Prof. A. P. Juškevič realçou recentemente que pode existir um outro lado da questão: «Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis», in *Euler Sammelband zum 250. Geburtstage*, Berlim, 1959, pp. 224-244.

[122] L. Tenca, «Guido Grandi», in *Physis*, 2, 1960, pp. 84-89.

como símbolo da Criação a partir do Nada. Obteve o resultado 1/2, considerando o caso de um pai que legou uma pedra preciosa aos seus dois filhos, que, alternadamente, a deviam manter na sua posse durante um ano. Pertencia então a cada filho uma metade do tempo.

A fundamentação do cálculo por Euler pode ter tido as suas fraquezas, mas ele exprimiu os seus pontos de vista sem imprecisões. D'Alembert, em alguns artigos da *Encyclopédie*, tentou encontrar esta fundamentação por outros meios. Newton tinha usado a expressão «razão primeira e última» para a «fluxão», sendo exactamente a primeira ou última razão de duas quantidades infinitesimais[123]. D'Alembert substituiu esta noção pela concepção de um «limite». Chamou a uma quantidade limite de outra quando a segunda se aproxima da primeira mais que qualquer quantidade dada. «A diferenciação de equações consiste simplesmente em encontrar os limites de uma razão de diferenças finitas de duas variáveis incluídas na equação» (ver secção 7 deste capítulo). Esta concepção foi um grande passo em frente, tal como a concepção de d'Alembert de infinitos de ordens diferentes. Porém, os seus contemporâneos não foram facilmente convencidos da importância do novo avanço e, quando d'Alembert disse que a secante se tornava tangente quando os dois pontos de intersecção se reduziam a um, sentiu-se que não tinha ultrapassado as dificuldades inerentes aos paradoxos de Zenão. Apesar de tudo, uma quantidade variável atinge o seu limite? Ou nunca o atinge?

Já referimos o criticismo do bispo Berkeley em relação às fluxões de Newton. George Berkeley, deão de Derry em 1724, bispo de Cloyne, no Sul da Irlanda, em 1734 —residindo em Newport, na Irlanda, de 1729 a 1731—, é conhecido principalmente pelo seu idealismo extremo *(esse est percipi)*. Ele ressentiu-se com o suporte que a ciência de Newton proporcionava ao materia-

---

[123] No texto inglês: «as the first or last ratio of two quantities just springing into being». *(N. do T.)*

lismo e atacou a teoria das fluxões em *The Analyst* (1734). Zombou dos infinitesimais, considerando-os «fastasmas de quantidades desaparecidas»; se x recebe um incremento o, o incremento de x^n, dividido por o, é

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1,2} x^{n-2}\, o + \ldots$$

Isto obtém-se supondo que o é diferente de zero. A fluxão de x^n, nx^{n-1}, porém, é obtida tomando o como igual a zero. A hipótese é de repente alterada, pois o era supostamente diferente de zero. Este era o «sofisma manifesto» descoberto no cálculo por Berkeley, que acreditava que os resultados correctos eram obtidos por uma compensação de erros. As fluxões eram logicamente inexplicáveis. «Mas quem conseguir assimilar uma segunda ou terceira Fluxão, uma segunda ou terceira Diferença», exclamava Berkeley ao «matemático infiel» a quem se dirigiu (Halley), «não necessita, julgo, de ser excessivamente escrupuloso acerca de qualquer Questão sobre Divindade.» Não foi o único caso em que uma dificuldade crítica na ciência foi usada para fortalecer uma filosofia idealista.

John Landen, um matemático inglês autodidacta cujo nome é salvaguardado na teoria dos integrais elípticos, tentou dominar à sua maneira as dificuldades básicas do cálculo infinitesimal. Em *Residual Analysis* (1764) enfrenta as críticas de Berkeley, evitando totalmente os infinitesimais; a derivada de x^3, por exemplo, era encontrada pela substituição de x por x_1, pelo que

$$\frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + xx_1 + x^2$$

se tornara $3x^2$ quando $x = x_1$. Como este procedimento envolve séries infinitas quando as funções são mais complicadas, o método de Landen possui algumas afinidades com o método «algébrico» de Lagrange, que surgiu posteriormente.

Embora Euler fosse incontestavelmente o principal matemático deste período, a França continuou a produzir trabalhos de grande originalidade. Mais do que em qualquer país, a matemática era aí considerada a ciência que viria trazer mais perfeição à teoria de Newton. A teoria da gravitação universal tinha atraído muito os filósofos do iluminismo, que a usaram como arma contra os restos de feudalismo. Em 1664, a igreja católica colocara Descartes no Index, mas em 1700 as suas teorias tinham-se vulgarizado mesmo nos círculos conservadores. A questão do newtonismo *versus* cartesianismo tornou-se durante algum tempo um assunto de grande interesse, não só nos círculos cultos, mas também nos salões. As *Lettres sur les Anglais* (1734), de Voltaire, contribuíram muito para introduzir Newton no público culto francês. Mme du Châtelet, amiga de Voltaire, chegou a traduzir os *Principia* em francês (1759). Um aspecto particular da contenda entre as duas escolas era a representação da Terra. Na cosmogonia defendida pelos cartesianos, a Terra alongava-se nos Pólos; a teoria de Newton exigia que a Terra fosse achatada. Os astrónomos cartesianos Cassini (Jean Dominique, o pai, e Jacques, o filho; o pai é conhecido na geometria devido à «oval de Cassini», 1680) mediram um arco de meridiano em França, entre 1700 e 1720, reclamando a verdade da conclusão cartesiana. A controvérsia surgiu e nela participaram muitos matemáticos. Em 1735 foi enviada uma expedição ao Peru[124], seguida, em 1736-37, por outra, dirigida por Pierre de Maupertuis, ao Torne, na Suécia, para que se medisse um grau de longitude. O resultado das expedições foi um triunfo para a teoria de Newton, assim como para o próprio Maupertuis. Conhecido como *grand aplatisseur* («o grande aplanador»), Maupertuis tornou-se presidente da Aca-

---

[124] Trata-se do vice-reino do Peru, muito maior que o Peru actual; a sede da expedição situava-se em Quito, actualmente no Equador.

demia de Berlim e desfrutou durante muitos anos da sua fama junto da corte de Frederico-o-Grande. O seu triunfo durou até 1750, quando participou numa controvérsia animada com o matemático suíço Samuel König relacionada com o princípio da menor acção em mecânica, talvez já conhecido por Leibniz. Maupertuis procurava, tal como Fermat antes dele e Einstein depois, um princípio geral pelo qual as leis do universo pudessem ser unificadas. A formulação de Maupertuis não foi clara, mas definiu a sua «acção» como a quantidade mvs (m = massa, v = velocidade, s = distância). Combinou a sua formulação com uma prova da existência de Deus. A controvérsia chegou ao máximo quando Voltaire ridicularizou o presidente infeliz em *Diatribe du docteur Akakia, médecin du pape* (1752). Nem o apoio do rei nem a defesa de Euler puderam socorrer o espírito desfeito de Maupertuis e o matemático derrotado morreu pouco depois em Basileia, na casa dos Bernoulli.

Euler voltou a exprimir o princípio da menor acção, insistindo em que $\int mvds$ devia ser mínimo; além disso, não cedeu à metafísica de Maupertuis. Isto colocou o princípio numa base sólida, sendo usado por Lagrange[125] e, mais tarde, por Hamilton. O uso do «hamiltoniano» na física matemática moderna ilustra o carácter fundamental da contribuição de Euler para a controvérsia entre Maupertuis e König[126].

Entre os matemáticos que acompanharam Maupertuis à Lapónia encontrava-se Alexis Claude Clairaut. Clairaut, com 18 anos de idade, tinha publicado *Recherches sur les courbes à double courbure* (1731), uma primeira tentativa de tratar a geometria analítica e diferencial das curvas espaciais. Quando chegou da Lapónia, Clairaut publicou a sua *Theórie de la figure*

---

[125] Ver E. Mach, *The Science of Mechanics*, Chicago, 1893, p. 364; R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, 1950.

[126] Detalhes sobre a controvérsia são dados por Euler, *Opera omnia*, 2.ª série, vol. 5, 1957, introdução de J. O. Fleckenstein. A maior autoridade sobre a mecânica do século XVIII é C. Truesdell (ver a «Bibliografia» adiante).

de la Terre (1743), um trabalho capital sobre o equilíbrio dos fluidos e a atracção dos elipsóides de revolução. Laplace apenas o melhorou em pequenos detalhes. Entre os seus numerosos resultados encontra-se a condição para o diferencial $Mdx + Ndy$ ser exacto. Este livro foi seguido pela *Théorie de la lune* (1752), que acrescentou material à teoria de Euler do movimento da Lua e ao problema dos três corpos em geral. Clairaut também contribuiu para a teoria dos integrais de linha e equações diferenciais; um dos tipos que ele considerou é conhecido como «equação de Clairaut»; oferece um dos primeiros exemplos conhecidos de solução singular. Também se deve a Clairaut o teorema que diz que para $z = f(x,y)$ os valores $\partial^2 z/\partial x\, \partial y$ e $\partial^2 z/\partial y\, \partial x$ são iguais. Mas o primeiro que o afirmou foi Nikolaus Bernoulli (1725) e também o encontramos na *Introductio*, de Euler.

7

A oposição intelectual ao *ancien régime* centrou-se, depois de 1750, à volta da famosa *Enciclopédia* (28 vols., 1751-52). O editor foi Denis Diderot, sob cuja chefia a *Enciclopédia* apresentou uma filosofia detalhada do iluminismo. Os conhecimentos de Diderot sobre matemática não eram poucos[127], mas o principal matemático dos enciclopedistas foi Jean Le Rond d'Alembert, filho natural de uma senhora aristocrata e abandonado

---

[127] Existe uma história muito citada acerca de Euler e Diderot, segundo a qual Euler, num debate público em Sampetersburgo, conseguiu embaraçar o livre-pensador Diderot, clamando que possuía uma demonstração algébrica da existência de Deus: «Senhor, $(a + b^n)/n = x$; por isso Deus existe. Responda por favor.» É um bom exemplo de uma má anedota histórica, pois o valor de uma anedota acerca de uma personalidade histórica repousa na faculdade de ilustrar certos aspectos do seu carácter. Esta anedota serve para obscurecer quer o carácter de Diderot, quer o de Euler. Diderot sabia matemática e escreveu sobre involutas e probabilidades, e não há razão para pensar que o brilhante Euler se tenha comportado daquela forma asinina. A história parece ter sido cozinhada pelo matemático inglês De Morgan (1806-71). Ver L. G. Krakeur e

como criança enjeitada próximo da Igreja de St. Jean Le Rond, em Paris. O seu precoce brilhantismo facilitou-lhe a carreira. Em 1754 tornou-se *secrétaire perpétuel* da Academia Francesa e, como tal, o homem de ciência mais influente de França. Em 1743 apareceu o seu *Traité de dynamique*, que contém o método de reduzir a dinâmica dos corpos sólidos à estática, conhecido como «princípio de d'Alembert». Continuou a escrever sobre vários assuntos aplicados, especialmente sobre hidrodinâmica, aerodinâmica e o problema dos três corpos. Em 1747 apareceu a teoria das cordas vibrantes, que o tornou, juntamente com Daniel Bernoulli, o fundador da teoria das equações diferenciais às derivadas parciais. Enquanto d'Alembert e Euler resolveram a equação $z_{tt} = k^2 z_{xx}$ através da expressão $z = f(x + kt) + \phi(x - kt)$, Bernoulli resolveu-a através de séries trigonométricas. Permaneceram sérias dúvidas no que diz respeito à natureza desta solução; d'Alembert acreditava que a forma inicial de uma corda só pode ser dada por uma expressão analítica única, enquanto Euler pensava que «qualquer» curva contínua a poderia dar. Bernoulli, ao contrário de Euler, acreditava que a sua solução por séries era perfeitamente geral. A explicação completa teve de esperar até 1824, quando Fourier eliminou as dúvidas acerca da validade das séries trigonométricas para representar «qualquer» função[128].

D'Alembert escrevia facilmente sobre vários assuntos, incluindo questões fundamentais em matemática. Já mencioná-

---

R. L. Krueger, *Isis*, vol. 31, 1940, pp. 431-432; ver também vol. 33, 1941, pp. 219-231. É verdade que no século XVIII havia uma discussão ocasional sobre a possibilidade de uma demonstração algébrica da existência de Deus; Maupertuis tentou arranjar uma; ver a *Diatribe de Voltaire, Œuvres*, vol. 41, 1821, pp. 19 e 30. Ver também B. Brown, *Amer. Math. Monthly*, vol. 49, 1944, e R. J. Gillings, *Amer. Math. Monthly*, vol. 61, 1954, pp. 77-80.

[128] Para o desenvolvimento do conceito de função ver A. P. Youschkevitc (Juškcvič), «The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century», in *AHES*, vol. 16, 1976, pp. 37-85. Também A. F. Monna, *AHES*, vol. 9, 1972, pp. 57-84.

mos a sua introdução da noção de limite. O teorema «fundamental» da álgebra é por vezes chamado «teorema de d'Alembert» devido à sua tentativa para o provar (1746). O «paradoxo» de d'Alembert na teoria das probabilidades revela que ele também se debruçou sobre os fundamentos da sua teoria — embora nem sempre com muito êxito.

A teoria das probabilidades avançou rapidamente neste período, especialmente devido à elaboração posterior das ideias de Fermat, Pascal e Huygens. A *Ars conjectandi* foi seguida por vários outros textos, entre eles *The Doctrine of Chances* (1716), escrito por Abraham de Moivre, um huguenote francês que se estabeleceu em Londres depois da revogação do Édito de Nantes (1685) e que ganhava a sua vida dando lições particulares. O nome de de Moivre liga-se a um teorema da trigonometria que, na sua forma presente $(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi$, aparece pela primeira vez na *Introductio*, de Euler. Num artigo publicado em 1733, ele derivou a função de probabilidade normal como uma aproximação à lei binomial e uma fórmula equivalente à de Stirling. James Stirling, um matemático escocês da escola newtoniana, publicou a sua série em 1730.

As frequentes lotarias e as companhias de seguros que se organizaram neste período interessaram muitos matemáticos, incluindo Euler, pela teoria das probabilidades. Este facto conduziu à tentativa de aplicar a doutrina do acaso a novos campos. Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, director do Jardin du Roi, de Paris, e que é conhecido como autor de uma história natural de trinta e seis agradáveis volumes e do famoso discurso sobre o estilo (1753: *le style c'est l'homme même*), introduziu em 1777 o primeiro exemplo de uma probabilidade geométrica. Este era o chamado «problema da agulha», que atraíra a imaginação de muita gente, porque permitia a determinação «experimental» de π através do lançamento de uma agulha sobre um plano coberto com linhas paralelas e equidistantes e contando o número de vezes que a agulha atingia uma linha.

A este período pertencem também as tentativas de aplicar a teoria das probabilidades ao juízo humano; por exemplo, ao calcular a probabilidade de um tribunal chegar a veredictos verdadeiros, se a cada uma das diferentes testemunhas e jurados puder ser atribuído um número que expresse a probabilidade de dizer ou compreender a verdade. Esta curiosa *probabilité des jugements*, com a sua marca característica da filosofia iluminista, é proeminente nos trabalhos do marquês de Condorcet e reaparece em Laplace e mesmo em Poisson (1837).

8

De Moivre, Stirling e Landen foram bons representantes dos matemáticos ingleses do século XVIII. Devemos referir-nos a mais alguns, embora nenhum deles atingisse a importância dos seus colegas continentais. A tradição do venerado Newton apoiava-se profundamente na ciência inglesa e a sua notação grosseira, comparada com a de Leibniz, tornou o progresso difícil. Existiram razões sociais profundas pelas quais os matemáticos ingleses se recusaram a emancipar-se do método das fluxões de Newton. A Inglaterra encontrava-se constantemente em guerras comerciais com a França e desenvolveu um sentimento de superioridade intelectual que foi encorajado não só pelas vitórias alcançadas nas guerras e no comércio, mas também pela admiração que os filósofos continentais dedicavam ao seu sistema político. A Inglaterra tornou-se vítima da sua suposta excelência. Existe uma analogia entre as matemáticas da Inglaterra do século XVIII e as do período final de Alexandria. Em ambos os casos, o progresso foi tecnicamente impedido por uma notação inadequada, mas as razões para a satisfação pessoal dos matemáticos eram de uma natureza social mais profunda.

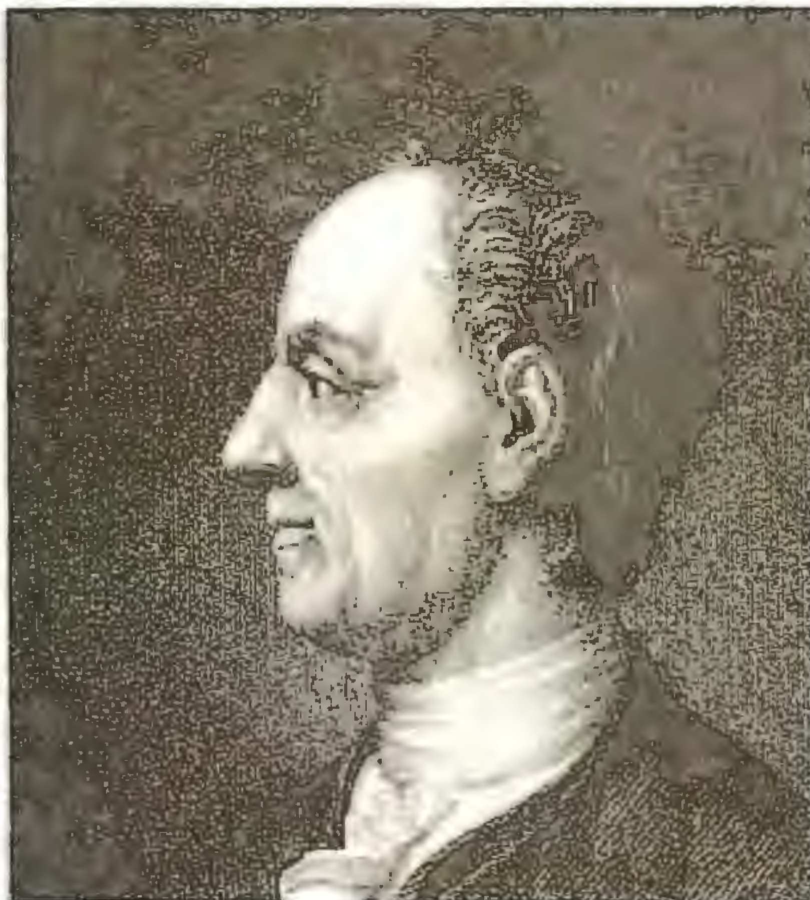
O principal matemático britânico deste período foi o escocês Colin Maclaurin, professor na Universidade de Edimburgo, discípulo de Newton, com quem privou pessoalmente. O seu estudo e a extensão dos métodos fluxionais, de curvas de segunda

ordem e de ordem superior e da atracção de elipsóides desenvolveram-se paralelamente aos esforços contemporâneos de Euler e Clairaut. Vários teoremas de Maclaurin ocupam lugar na nossa teoria das curvas planas e na geometria projectiva. Na sua *Geometria organica* (1720) encontramos a observação, conhecida como «paradoxo de Cramer», de que uma curva de ordem n não é sempre determinada por $n(n+3)/2$ pontos, de forma que nove pontos não podem determinar univocamente uma cúbica e dez pontos já seriam de mais. Também encontramos aqui métodos cinemáticos para descrever curvas planas de graus diferentes. O *Treatise of Fluxions* (2 vols., 1742), de Maclaurin —escrito para defender Newton de Berkeley—, é difícil de ler devido à linguagem geométrica antiquada; um grande contraste com a facilidade da escrita de Euler. Maclaurin usava este método para obter o rigor arquimediano. O livro contém as investigações de Maclaurin sobre a atracção de elipsóides de revolução e o seu teorema que diz que dois de tais elipsóides, se forem confocais, atraem uma partícula sobre o eixo ou no equador com forças proporcionais aos seus volumes. No seu *Treatise*, Maclaurin também trata da famosa «série de Maclaurin».

Esta série, porém, não era uma nova descoberta, pois tinha aparecido no *Methodus incrementorum* (1715), escrito por Brook Taylor, durante algum tempo secretário da Royal Society. Maclaurin reconheceu abertamente a sua dívida para com Taylor. A série de Taylor é agora sempre dada na notação de Lagrange:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

Taylor menciona explicitamente a série para $x = 0$, que muitos compêndios insistem em chamar «série de Maclaurin». A derivação de Taylor não incluiu considerações sobre convergência, mas Maclaurin fez uma introdução com estas considerações —tinha mesmo o chamado teste do integral para séries



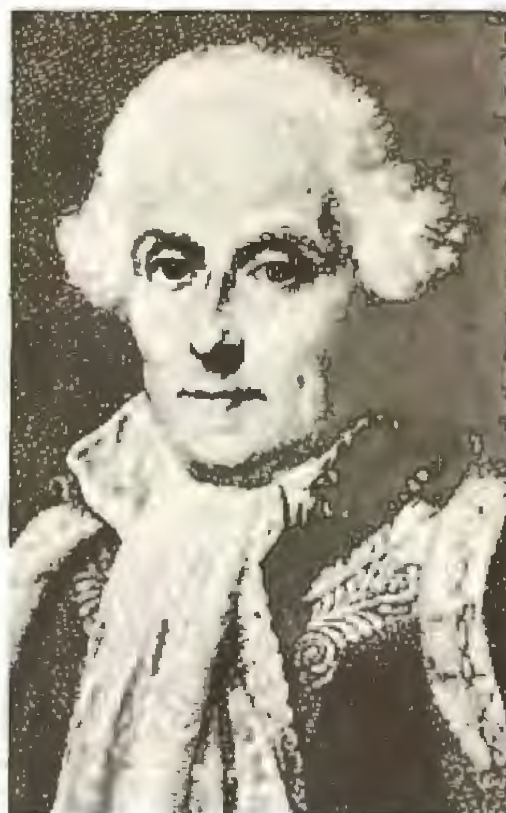
LEONHARD EULER (1707-1783)
(De um retrato por A. Lorgna)



JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)



JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)



PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827)
(De uma gravura segundo
um quadro de Naigeon)



JEAN-ETIENNE MONTUCLA (1725-1799)
(Segundo uma gravura tirada de uma
miniatura de P. Viel)

infinitas. A importância da série de Taylor não foi reconhecida até que Euler a aplicou no seu cálculo diferencial (1755). Lagrange suplementou-a com o resto e usou-a como fundamentação da sua teoria das funções.

O próprio Taylor usou a sua série para a integração de algumas equações diferenciais. Também começou o estudo das cordas vibrantes, retomado mais tarde por d'Alembert e outros (ver secção 7, atrás).

9

Joseph-Louis Lagrange nasceu em Turim, de ascendência ítalo-francesa. Com 19 anos de idade tornou-se professor de Matemática na Escola de Artilharia de Turim (1755). Em 1766, quando Euler trocou Berlim por Sampetersburgo, Frederico-o-Grande convidou Lagrange para ir a Berlim, acompanhando o seu convite, conta-se, com uma mensagem modesta que dizia que «é necessário que o maior geómetra da Europa viva próximo do maior dos reis».

Lagrange ficou em Berlim até à morte de Frederico (1786), depois do que foi para Paris. Durante a Revolução ajudou na reforma dos sistemas de pesos e medidas e, mais tarde, tornou-se professor, primeiro na Ecole Normale (1795) e depois na Ecole Polytechnique (1797).

Pertencem aos primeiros trabalhos de Lagrange as contribuições para o cálculo das variações. A memória de Euler sobre este assunto tinha aparecido em 1755. Lagrange observou que o método de Euler não tinha «toda a simplicidade desejável para um assunto de análise pura». O resultado foi o cálculo de variações puramente analítico de Lagrange (1760-61), que não tem apenas descobertas originais, mas também material histórico bem ordenado e bem assimilado — algo muito característico de todos os trabalhos de Lagrange. Lagrange aplicou imediatamente a sua teoria a problemas de dinâmica, nos quais ele usa muito a formulação de Euler sobre o princípio da menor acção,

o resultado do episódio lamentável de Akakia (ver secção 6). Deste modo, muitas das ideias essenciais da *Mécanique analytique* datam do período em que Lagrange viveu em Turim. Também contribuiu para um dos problemas típicos do seu tempo, a teoria da Lua, importante não só por si, mas também para a solução do problema de calcular a longitude. Lagrange deu as primeiras soluções particulares para o problema dos três corpos. O teorema de Lagrange diz que é possível lançar três corpos finitos de tal forma que as suas órbitas sejam elipses semelhantes descritas no mesmo tempo (1772). Em 1767 surgiu a sua memória, *Sur la résolution des équations numériques*, na qual apresentou métodos para separar raízes reais de uma equação algébrica e para as aproximar através de fracções contínuas. A este trabalho seguiram-se, em 1770, as *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, que tratava da questão fundamental da razão por que os métodos usuais para resolver equações de grau $n \leqslant 4$ não servem para $n > 4$. Esta questão conduziu Lagrange às funções racionais das raízes e ao seu comportamento em relação a permutações de raízes, procedimento que não só estimulou Ruffini e Abel nos seus trabalhos sobre o caso $n > 4$, mas também conduziu Galois à sua teoria dos grupos. Lagrange também fez progressos na teoria dos números quando investigou resíduos quadráticos e provou, entre muitos outros teoremas, que todo o inteiro é a soma de, quando muito, quatro quadrados.

Lagrange dedicou a segunda parte da sua vida à composição dos seus maiores trabalhos: *Mécanique analytique* (1788), *Théorie des fonctions analytiques* (1797) e, em continuação, *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801).

Os dois livros sobre funções eram uma tentativa de dar uma fundamentação sólida ao cálculo, pela sua redução à álgebra. Lagrange rejeitou a teoria dos limites indicada por Newton e formulada por d'Alembert. Ele não podia entender bem o que acontecia quando $\Delta y / \Delta x$ atingia o seu limite. Nas palavras de Lazare Carnot, o *organisateur de la victoire* na Revolução Fran-

cesa, que também se preocupou com o método dos infinitesimais de Newton:

> Aquele método tinha o grande inconveniente de considerar as quantidades no estado em que deixam, por assim dizer, de ser quantidades, porque, embora possamos sempre conceber bem a razão de duas quantidades, desde que permaneçam finitas, essa razão não oferece ao espírito ideias claras e precisas logo que os seus termos se tornem, um e outro, nulos ao mesmo tempo[129].

O método de Lagrange era diferente do dos seus predecessores. Começou com as séries de Taylor, que ele derivou com os seus restos, demonstrando de uma forma bastante ingénua que «qualquer» função $f(x)$ podia ser desenvolvida em tais séries com a ajuda de um processo puramente algébrico. Então as derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, etc., eram definidas como coeficientes de h, h^2,... no desenvolvimento de Taylor de $f(x + h)$ em termos de h. [A notação $f'(x)$, $f''(x)$ é devida a Lagrange.]

Embora o seu método «algébrico» de fundamentar o cálculo fosse insatisfatório, e apesar de Lagrange não prestar a suficiente atenção à convergência das séries, o tratamento abstracto das funções foi um considerável passo em frente. Surgiu então a primeira «teoria de funções de uma variável real» com aplicações a uma grande variedade de problemas na álgebra e na geometria.

A *Mécanique analytique*, de Lagrange, é talvez o seu trabalho mais válido e ainda merece um estudo cuidadoso. Neste livro, que aparece cem anos depois dos *Principia*, de Newton, o grande poder da recentemente desenvolvida análise é aplicado à mecânica do ponto e dos corpos rígidos. Os resultados de Euler, de d'Alembert e de outros matemáticos do século XVIII foram assimilados e mais tarde desenvolvidos de um ponto de vista consistente. O grande uso do cálculo das variações de Lagrange tornou possível a unificação de vários princípios de

---

[129] L. Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 5.ª ed., Paris, 1881, p. 147; ver também F. Cajori, *Amer. Math. Monthly*, vol. 22, 1915, p. 148.

estatística e dinâmica. Na estatística, pelo uso do princípio das velocidades virtuais; na dinâmica, pelo uso do princípio de d'Alembert. Isto conduziu naturalmente às coordenadas generalizadas e à equação do movimento na forma «lagrangiana»:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i.$$

A abordagem geométrica de Newton estava agora totalmente abandonada; o livro de Lagrange foi um triunfo da análise pura. O autor chegou ao ponto de assinalar no prefácio: *On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage, seulement des opérations algébriques*[130]. Isto caracterizou Lagrange como o primeiro verdadeiro analista.

10

Com Pierre Simon Laplace chegamos ao último dos principais matemáticos do século XVIII. Filho de um pequeno proprietário da Normandia, frequentou as aulas de Beaumont e Caen e, com a ajuda de d'Alembert, tornou-se professor de Matemática na escola militar de Paris. Possuía outros cargos docentes e administrativos e participou, durante a Revolução, na organização da Ecole Normale, assim como na da Ecole Polytechnique. Napoleão concedeu-lhe as maiores honras, mas Luís XVIII também. Em contraste com Monge e Carnot, Laplace facilmente mudou de simpatias políticas e era, além disso, um pouco *snob;* esta consciência volúvel tornou-lhe possível continuar a actividade matemática, apesar de todas as transformações políticas em França.

Os dois grandes trabalhos de Laplace que unificam não só as suas investigações, mas também todo o trabalho anterior nos correspondentes assuntos, são *Théorie analytique des probabi-*

---

[130] «Não se encontrarão figuras neste livro, apenas operações algébricas.» A palavra «algébrica» em vez de «analítica» é característica.

lités (1812) e *Mécanique céleste* (5 vols., 1799-1825). Os dois trabalhos monumentais são prefaciados por exposições extensas em termos não técnicos: *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) e *Exposition du système du monde* (1796).

A *Exposition* contém a hipótese das nebulosas, proposta independentemente por Kant em 1755 (e, mesmo antes de Kant, por Swedenborg, em 1734). A *Mécanique céleste* foi o culminar dos trabalhos de Newton, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange e do próprio Laplace sobre a forma da Terra, a teoria da Lua, o problema dos três corpos e as perturbações dos planetas, conduzindo ao problema crucial da estabilidade do sistema solar. O nome «equação de Laplace» para a equação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

recorda-nos que a teoria do potencial faz parte da *Mécanique céleste*. (A equação já tinha sido encontrada por Euler em 1752, quando ele derivou algumas das principais equações da hidrodinâmica). À volta destes cinco volumes agrupam-se muitas anedotas. É conhecida a suposta resposta de Laplace a Napoleão, que tentou provocá-lo com a observação de que Deus não era mencionado no seu livro: «*Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.*»[131] Nathaniel Bowditch, de Bóston, que traduziu para inglês quatro volumes da obra de Laplace, observou: «Cada vez que se me deparava um 'É bem claro que' de Laplace já sabia que viria a ter horas de trabalho duro antes de preencher o vazio e descobrir e demonstrar como é que as coisas surgiam claramente.» A carreira matemática de Hamilton começou quando ele encontrou um erro na *Mécanique céleste*, de Laplace. Green, ao ler Laplace, concebeu a ideia da teoria matemática da electricidade.

O *Essai philosophique sur les probabilités* é uma introdução de leitura acessível à teoria das probabilidades. Contém a defi-

---

[131] «Sire, não precisei dessa hipótese.»

nição «negativa» das probabilidades de Laplace, postulando «acontecimentos igualmente prováveis».

> A teoria das probabilidades consiste na redução de todos os acontecimentos da mesma espécie a um certo número de casos igualmente prováveis, que são casos em que nós estamos igualmente indecisos sobre a sua existência, e na determinação do número de casos que são favoráveis ao acontecimento do qual procuramos a probabilidade.

As questões relacionadas com probabilidades surgem, de acordo com Laplace, porque em parte conhecemos as coisas e em parte somos ignorantes. Este facto conduziu Laplace à sua famosa declaração que resume a interpretação do materialismo mecanicista do século XVIII:

> Uma inteligência que, num dado momento, conhecesse todas as forças que dominam a natureza e as respectivas posições dos seres que a compõem e, além disso, fosse suficientemente grande para submeter esses dados à análise, abrangeria na mesma fórmula os movimentos dos corpos maiores do universo e aqueles do átomo mais pequeno: nada seria incerto e o futuro, assim como o presente, surgiriam aos seus olhos. O pensamento humano oferece um débil esboço desta inteligência na perfeição que tem sido capaz de dar à astronomia.

O próprio texto é tão rico de material que muitas descobertas posteriores da teoria das probabilidades podem ser já encontradas em Laplace[132]. O grandioso volume contém uma discussão extensa sobre jogos de azar, probabilidades geométricas, o teorema de Bernoulli e a sua relação com o integral normal e sobre a teoria dos mínimos quadrados, inventada por Legendre. A ideia principal é o uso de *fonctions génératrices*, das quais Laplace demonstra o poder para a solução de equações às diferenças. É aqui que é introduzida a «transformada de Laplace», que mais tarde se torna a chave para o cálculo operacional de Heaviside. Laplace também libertou do esquecimento e refor-

---

[132] E. C. Molina, «The Theory of Probability: Some Comments on Laplace's 'Théorie analytique'», in *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 36, 1930, pp. 369-392.

mulou uma teoria esboçada por Thomas Bayes, um obscuro clérigo inglês, teoria que foi publicada postumamente em 1763-64. Esta teoria tornou-se conhecida como «teoria das probabilidades inversas».

11

É curioso o facto de, no final do século XVIII, alguns dos principais matemáticos terem expresso o sentimento de que o campo da matemática, de uma maneira ou de outra, estava saturado. Os esforços de Euler, Lagrange, d'Alembert e outros já teriam conduzido aos teoremas mais importantes que os grandes textos de referência tinham colocado, ou viriam a colocar em breve, no seu lugar próprio. Os poucos matemáticos da geração seguinte apenas poderiam encontrar problemas menores para resolver. *«Ne vous semble-t-il pas que la haute géométrie va un peu à décadence?»*, escreveu Lagrange a d'Alembert em 1772. *«Elle n'a d'autre soutien que vous et M. Euler.»*[133] Lagrange chegou mesmo a interromper os seus trabalhos matemáticos por uns tempos. D'Alembert não tinha grandes esperanças para oferecer. Arago, no seu *Éloge de Laplace* (1842), expressou mais tarde um sentimento que nos pode ajudar a compreender essa impressão:

> Cinco geómetras —Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange e Laplace— partilharam entre eles o mundo do qual Newton tinha revelado a existência. Exploraram-no em todas as direcções, penetraram em regiões que se julgavam inacessíveis, assinalaram inúmeros fenómenos naquelas regiões, que a observação ainda não tinha descoberto, e, finalmente —e aqui reside a sua glória imortal—, englobaram num único princípio, numa única lei, tudo aquilo que é mais subtil e misterioso nos movimentos dos corpos celestes. A geometria também teve a ousadia de dispor do futuro; com o passar dos séculos escrupulosamente se confirmarão as decisões da ciência[134].

---

[133] «Não lhe parece que a sublime geometria tende a tornar-se um pouco decadente? Ela não tem outro apoio além de si e do Sr. Euler.» O termo «geometria», no século XVIII em França, era utilizado para a matemática em geral.

[134] F. Arago, *Œuvres complètes*, Paris-Leipzig, 1855, vol. 3, p. 464.

A oratória de Arago realça a principal fonte deste pessimismo de *fin de siècle*, que consistia na tendência para identificar o progresso da matemática com o progresso da mecânica e da astronomia. Desde a antiga Babilónia até Laplace e Euler, a astronomia guiou a inspirou as mais sublimes descobertas na matemática. Agora, este desenvolvimento parecia ter atingido o seu máximo. Porém, uma nova geração, inspirada por novas perspectivas, abertas pela Revolução Francesa e pelo florescimento das ciências naturais, viria a demonstrar como este pessimismo era infundado. Este grande e novo impulso veio apenas em parte de França; também veio, como muitas vezes na história da civilização, da periferia dos centros políticos e económicos, neste caso de Gotinga, através de Gauss.

12

À França da época iluminista pertence a primeira história extensiva da matemática, uma narrativa de leitura agradável, e não apenas um catálogo de nomes e títulos, tal como as do passado. É a *Histoire des mathématiques*, de Jean-Etienne Montucla, um advogado que se movia nos círculos dos enciclopedistas, desempenhando depois de 1761 uma série de cargos governamentais importantes. Publicada primeiramente em 1758 em dois volumes e, mais tarde, com a ajuda do astrónomo J.-J. de Lalande, em quatro volumes (1799-1802), contém matemáticas «puras» e «mistas» (aplicadas) e até mesmo música. O livro, embora tenha estimulado pesquisas posteriores, não teve sucessor até ao de Moritz Cantor, cem anos mais tarde, e nessa altura sem a parte aplicada. À obra de Montucla seguiram-se os dois volumes do *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, do abade Charles Bossuet (1802), editor da obra de Pascal (1779), que foi muito lida também através de traduções.

As obras de Lagrange e Laplace estão disponíveis através de edições modernas; as de Euler estão sendo publicadas e em vias de conclusão numa edição monumental, contendo muitos volumes e introduções importantes. Também foram publicados volumes da correspondência de Euler. A edição das obras de todos os Bernoulli começou; entre as que estão publicadas encontram-se a *Ars conjectandi* em *Die Werk von Jakob Bernoulli*, vol. 3 (Basileia, 1975), com comentários. Antes disto tínhamos apenas uma edição da obra de Jakob (1744, 2 vols.) e da de Johann (1742, 4 vols.). A edição monumental da obra de Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, começou em 1911, é publicada em três séries e a primeira, a *Opera Mathematica*, com 29 volumes, está completa. Ver A. P. Youschkevitch (Juškevič), *DSB*, vol. 4, 1971, pp. 467-484.

Truesdell, C., «Leonhard Euler, Supreme Geometer (1707-83)», in *Studies in Eighteenth Century Culture*, vol. 2, 1972, pp. 51-95.

Juškevič, A. P., e Winter, E., *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel*, 1729-64, Berlim, 1965.

Sobre Laplace ver o extensivo artigo de C. C. Gillespie em *DSB*, vol. 15, supl. I, 1978, pp. 273-403.

[Mills, S., ed.] *The Collected Letters of Colin MacLaurin*, Nantwick, Cheshire, 1982 (Birkhäuser, Boston, distribuidor).

Lambert, J. H., *Opera mathematica*, 2 vols., Berlim, 1946. (O vol. 1, pp. IX-XXXI, contém um prefácio de A. Speiser.)

Cajori, F., *A History of the Conception of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Chicago, 1931.

Jourdain, P. E. B., *The Principle of Least Action*, Chicago, 1913.

DuPasquier, L. G., *Léonard Euler et ses amis*, Paris, 1927.

Spiess, O., *Leonhard Euler*, Frauenfeld e Leipzig, 1929.

Leonard Euler, *Collection of Articles in Honor of the 250th Anniversary of His Birth*, Moscovo, 1958 (em russo). [Ver também artigos em *Istor.-mat. Issled.*, vol. 7, 1954, pp. 451-640 (em russo). E ainda *A Collection of Articles Published on the Occasion of the 150th Anniversary of Euler's Death*, Moscovo e Leninegrado, 1935 (em russo).]

Euler, L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, J. E. Hofmann, ed. Reclam, Estugarda, 1959 (com introdução histórica).

Fleckenstein, J. O., «Johann und Jakob Bernoulli», in *Elemente der Mathematik*, supl. 7, Basileia, 1949.

Hofmann, J. E., «Über Jakob Bernoulli's Beiträge zur Infinitesimalmathematik», in *Enseignement mathématique*, 2.ª série, 5, 1956, pp. 61-171.

Andoyer, H., *L'œuvre scientifique de Laplace*, Paris, 1922.

Loria, G., «Nel secondo centenario della nàscita di G. L. Lagrange», in *Isis*, vol. 28, 1938, pp. 367-375. (Contém uma bibliografia completa.)

Auchter, H., *Brook Taylor der mathematiker und Philosoph*, Marburgo, 1937. (Mostra, a partir de dados colhidos nos manuscritos de Leibniz, que este teve a série Taylor cerca de 1694. James Gregory já a possuía em 1671.)

Green, H. G., e Winter, H. J. J., «Hohn Landen, F. R. S. (1719-90), Mathematician», in *Isis*, vol. 35, 1944, pp. 6-10.

[Bayes, T.] Facsimile of Two Papers, with commentaries by E. C. Molina and W. E. Deming, Washington, D. C., 1940.

Pearson, K., «Laplace», in *Biometrica*, vol. 21, 1929, pp. 202-216.

Stäckel, P., «Zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert», in *Bibliotheca mathematica*, vol. 3, n.° 2, 1901, pp. 111-121.

Nielsen, N., *Géomètres français du dix-huitième siècle*, Copenhaga e Paris, 1935.

Les œuvres de Nicolas Struyck (1687-1769) qui se rapportent au calcul des chances, J. A. Vollgraf, ed. Amsterdão, 1912.

Sarton, G., «Montucla», in *Osiris*, vol. 1, 1936, pp. 519-567.

Maystrov, L. E., «Lomonossov, Father of Russian Mathematics», in *The Soviet Review*, vol. 3, n.° 3, 1962, pp. 3-18. (Trad. de *Voprosy Filosofii*, vol. 5, 1961.)

Scott, J. F., «Mathematics Through the Eighteenth Century», in *Philos Mag.*, número comemorativo, 1948, pp. 67-90. (A ênfase incide sobre a Inglaterra.)

CAPÍTULO VIII

O século XIX

1

A Revolução Francesa e o período napoleónico criaram condições muito favoráveis para o desenvolvimento continuado das matemáticas. O caminho estava aberto para a revolução industrial no continente europeu. Isto estimulou o estudo das ciências físicas e criou novas classes sociais com uma nova visão da vida, interessadas na ciência e na educação técnica. As ideias democráticas invadiram a vida académica; o criticismo ergueu-se contra as formas antiquadas de pensamento; as escolas e as universidades tiveram de ser reformadas e rejuvenescidas.

A nova e turbulenta actividade matemática não foi devida basicamente aos problemas técnicos provocados pelas novas indústrias. A Inglaterra, o centro da revolução industrial, permaneceu estéril por várias décadas no que diz respeito à produção matemática. A matemática progrediu com mais fulgor em França e um pouco mais tarde na Alemanha, países nos quais o corte ideológico com o passado foi sentido mais profundamente e onde foram feitas transformações mais radicais, ou tiveram de ser feitas, para preparar terreno para a nova estrutura económica e política capitalista. A nova pesquisa matemática emancipou-se gradualmente da antiga tendência de ver na mecânica e na astronomia a meta final das ciências exactas. A pro-

cura da ciência como um todo separou-se mais das exigências da vida económica e da guerra. Multiplicaram-se os especialistas interessados na ciência pela ciência. A ligação com a prática nunca se quebrou inteiramente, mas tornou-se muitas vezes obscura. Uma divisão mais acentuada que no passado entre matemáticos «puros» e «aplicados» acompanhou o crescimento da especialização[135].

Os matemáticos do século XIX não se encontravam mais nas cortes reais ou nos salões da aristocracia. A sua princiapal ocupação não consistia mais em ser membro de uma academia culta; eram frequentemente empregados por universidades ou escolas técnicas e eram professores, assim como investigadores. Os Bernoulli, Lagrange e Laplace tinham ensinado apenas ocasionalmente. Agora a responsabilidade em ensinar aumentava; os professores de Matemática tornaram-se educadores e examinadores da juventude. O internacionalismo dos primeiros séculos tendia a ser destruído pelo crescimento das relações entre os cientistas de cada país, embora tivesse permanecido a troca de opiniões internacional. O latim científico foi gradualmente substituído pelas línguas nacionais. Os matemáticos começaram a trabalhar

[135] A diferença encontra a sua expressão clássica na observação de Jacobi sobre as opiniões de Fourier, que ainda representava o ponto de vista utilitário do século XVIII: *«Il est vrai que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique e l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombre vaut autant qu'une question de système du monde.»* («É verdade que o Senhor Fourier tinha a opinião de que o principal objectivo das matemáticas era a utilidade pública e a explicação dos fenómenos naturais; mas um filósofo como ele deveria saber que o único fim da ciência é a honra do espírito humano e que, deste ponto de vista, uma questão relacionada com números é tão importante como uma questão relacionada com o sistema do mundo.») Numa carta a Legendre, em 1830 (*Werke*, I, p. 454), Gauss apresentava a síntese das suas opiniões; ele aplicava livremente, ao mesmo tempo, a matemática à astronomia, à física e à geodesia, mas considerava a matemática a «rainha das ciências» e a aritmética a «rainha das matemáticas».

em campos especializados e, enquanto Leibniz, Euler e d'Alembert podem ser descritos como «matemáticos» (ou *géomètres*, no sentido equivalente que a palavra tinha no século XVIII), pensamos em Cauchy como um analista, em Cayley como um algebrista, em Steiner como um géometra (um geómetra «puro» até) e em Cantor como um pioneiro da teoria dos conjuntos de pontos (teoria dos conjuntos). O tempo era favorável aos «físicos matemáticos», seguidos por estudiosos de «estatística matemática» ou de «lógica matemática». A especialização seria somente quebrada por grande génios; e foi dos trabalhos de um Gauss, um Riemann, um Klein e um Poincaré que a matemática do século XIX recebeu o seu maior impulso.

2

Na linha divisória entre a matemática dos séculos XVIII e XIX domina a figura majestosa de Carl Friedrich Gauss. Nasceu na cidade alemã de Brunswick e era filho de um trabalhador à jorna. O duque de Brunswick reconheceu em Gauss uma criança-prodígio e tomou a seu cargo a sua educação. O jovem génio estudou de 1795 a 1798 em Gotinga e em 1799 obteve o grau de doutor em Helmstedt. De 1807 até à sua morte, em 1855, trabalhou calma e imperturbavelmente como director do observatório astronómico e professor da Universidade onde tinha estudado. O seu isolamento relativo, a sua compreensão das matemáticas «puras» e «aplicadas», a sua preocupação com a astronomia e o uso frequente do latim têm a marca do século XVIII, mas dos seus trabalhos dimana o espírito de um novo período. Como os seus contemporâneos Kant, Goethe, Beethoven e Hegel, manteve-se à margem das grandes lutas políticas que ocupavam os outros países, mas expressou no seu próprio campo as novas ideias da sua época de uma forma poderosíssima.

Os diários de Gauss revelam que com 17 anos já tinha começado a fazer descobertas surpreendentes. Em 1795, por exem-

plo, descobriu, independentemente de Euler, a lei da reciprocidade quadrática na teoria dos números. Algumas das suas primeiras descobertas foram publicadas na sua dissertação de Helmstedt, de 1799, e nas impressionantes *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801. A dissertação deu a primeira prova rigorosa do chamado «teorema fundamental da álgebra», que afirma que qualquer equação algébrica de grau n com coeficientes reais tem, pelo menos, uma raiz e, consequentemente, n raízes. O teorema vem de Albert Girard, o editor dos trabalhos de Stevin (*Invention nouvelle en algèbre*, 1629); d'Alembert tinha tentado dar uma prova em 1746. Gauss adorava este teorema e mais tarde dele deu mais duas demonstrações, voltando na quarta (1849) à primeira prova. A terceira demonstração (1816) utilizava integrais complexos e revelou a maestria precoce de Gauss na teoria dos números complexos.

As *Disquisitiones arithmeticae* reúnem todos os grandes trabalhos sobre teoria dos números anteriores a Gauss e enriquece-a de tal maneira que o começo da teoria moderna dos números é muitas vezes datado pela publicação deste livro. O seu núcleo é a teoria das congruências quadráticas, formas e resíduos; culmina na lei dos resíduos quadráticos, o *theorema aureum*, para o qual Gauss deu a primeira prova completa. Gauss estava tão fascinado por este teorema como pelo teorema fundamental da álgebra, tendo mais tarde publicado ainda cinco demonstrações; uma outra foi encontrada, depois da sua morte, entre os seus papéis. As *Disquisitiones* também contêm estudos de Gauss sobre a divisão do círculo, por outra palavras, sobre as raízes da equação $x^n = 1$. Conduziram ao notável teorema segundo o qual um polígono regular de 17 lados (mais geralmente, de n lados, $n = 2^p + 1$, $p = 2^k$, n primo, $k = 0, 1, 2, 3\ldots$) pode ser construído apenas com régua e compasso, uma extensão surpreendente da geometria do tipo grego.

O interesse de Gauss pela astronomia foi despertado quando, no primeiro dia do novo século (1 de Janeiro de 1801), Piazzi, em Palermo, descobriu o primeiro asteróide, a que foi dado o

nome de Ceres. Visto que só podiam ser feitas poucas observações do novo asteróide, levantou-se o problema do cálculo da órbita de um planeta a partir de um pequeno número de observações. Gauss resolveu o problema completamente, o qual conduziu a uma equação do oitavo grau. Quando, em 1802, Pallas, outro asteróide, foi descoberto, Gauss começou a interessar-se pelas perturbações seculares dos planetas. Isto levou-o à *Theoria motus corporum coelestium* (1809)[136], ao seu artigo sobre a atracção de elipsóides gerais (1813), ao seu trabalho sobre a quadratura mecânica (1814) e ao seu estudo das perturbações seculares (1818). A este período também pertence o artigo de Gauss sobre séries hipergeométricas (1812), que permite a discussão de um grande número de funções de um único ponto de vista. É a primeira investigação sistemática da convergência de uma série.

Depois de 1820, Gauss começou a estar activamente interessado em geodesia. Aqui combinou um extenso trabalho aplicado de triangulação com a investigação teórica. Um dos resultados foi a sua exposição do método dos mínimos quadrados (1821, 1823), que tinha sido já investigado por Legendre (1806) e Laplace. A mais importante contribuição deste período da vida de Gauss talvez fosse a teoria das superfícies em *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), onde tratou do assunto de uma forma muito diferente daquela que foi utilizada por Monge. Novamente as considerações práticas, agora no campo da geodesia superior, estavam subtilmente ligadas com a análise teórica. Nesta publicação surgiu a chamada geometria intrínseca de uma superfície, na qual as coordenadas curvilíneas são usadas para exprimir o elemento linear ds numa forma diferencial quadrática $ds^2 = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2$. Aqui também atingiu o clímace, o *teorema egregium*, o qual afirma que a curvatura total de uma superfície depende apenas de E, F e G e das

---

[136] Traduzido por *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections* por Charles Henry Davis.

suas derivadas, e assim é um invariante por flexão. Mas Gauss não desprezou o seu primeiro amor, a «rainha das matemáticas», mesmo neste período em que a sua actividade se centrou em problemas de geodesia. Assim, em 1825 e 1835 surge o trabalho sobre resíduos biquadráticos. Era uma continuação da teoria sobre resíduos quadráticos das *Disquisitiones arithmeticae*, mas que contava com um método novo, a teoria dos números complexos. O tratado de 1831 lidava não apenas com a álgebra dos números complexos, mas também com a aritmética. Surgiu uma nova teoria dos números primos, na qual 3 se conserva primo, mas $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ deixa de o ser. Esta nova teoria dos números complexos clarificou muitos pontos obscuros da aritmética, de forma que a lei da reciprocidade quadrática se tornou mais simples que nos números reais. Neste texto, Gauss afastou para sempre o mistério que ainda rodeava os números complexos, representando-os por pontos num plano[137].

Uma estátua em Gotinga representa Gauss e o seu colega mais jovem Wilhelm Weber no processo de invenção do telégrafo eléctrico. Estava-se em 1833-34, num período em que a atenção de Gauss começava a virar-se para a física. Neste período fez muito trabalho experimental sobre magnetismo terrestre. Mas também teve tempo para realizar uma contribuição teórica de grande importância, as *Allgemeine Lehrsätze*, sobre a teoria das forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância (1839, 1840). Isto era a origem da teoria do potencial como ramo separado da matemática (o artigo de Green de 1828 era praticamente desconhecido naquela época) e conduziu a certos princípios minimais relacionados com integrais múltiplos, nos quais reconhecemos o «princípio de Dirichlet». A existência de

[137] Cf. E. T. Bell, «Gauss and the Early Development of Algebric Numbers», in *Nat. Math. Mag.*, vol. 18, 1944, pp. 188 e 219. Euler e outros matemáticos depois de 1760 já tinham pensado em termos de tal representação dos números complexos. Ver A. Speiser, «Introduction to Euler», in *Opera Omnia*, 1.ª série, vol. 28, 1955, p. XXXVII.



CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)
(De um quadro de A. Jensen)



ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

um mínimo era evidente para Gauss; mais tarde, isto tornou-se uma questão controversa, que foi finalmente resolvida por Hilbert.

Gauss permaneceu activo até à sua morte, em 1855. Nos seus últimos anos dedicou-se cada vez mais à matématica aplicada. As publicações, porém, não dão uma noção adequada da sua grandeza. O aparecimento dos seus diários e de algumas cartas tem demonstrado que ele guardou para si alguns dos seus pensamentos mais penetrantes. Sabemos agora que em 1800 Gauss tinha descoberto as funções elípticas e por volta de 1816 estava na posse da geometria não euclidiana. Nunca publicou nada sobre estes assuntos; na realidade, apenas nalgumas cartas a amigos divulga a sua posição crítica em relação às tentativas para provar o axioma das paralelas de Euclides. Gauss parece não ter estado disposto a aventurar-se publicamente em qualquer assunto controverso. Em cartas escreve sobre as vespas que voam perto dos seus ouvidos e dos «brados dos boécios» que se fariam ouvir se os segredos não fossem guardados. Gauss duvidou, para si próprio, da validade da doutrina kantiana então aceite, segundo a qual a concepção de espaço é euclidiana *a priori;* para ele, a verdadeira geometria do espaço era um facto físico para ser descoberto pela experimentação.

3

Na história da matemática do século XIX, Felix Klein sugere comparações entre Gauss e Adrien-Marie Legendre, um matemático francês vinte cinco anos mais velho que Gauss. Talvez não seja justo comparar Gauss com qualquer matemático, salvo o maior; mas esta comparação particular mostra-nos como as ideias de Gauss estavam «no ar», pois Legendre, à sua própria maneira e independentemente, trabalhou em muitos assuntos que tinham ocupado Gauss. Legendre estudou desde 1775 a 1780 numa escola militar em Paris e mais tarde ocupou vários cargos de destaque, tal como o de professor na Ecole Normale,

o de inspector na Ecole Polytechnique e o de perito geodésico.

Tal como Gauss, realizou trabalhos fundamentais na teoria dos números (*Essai sur les nombres*, 1795; *Théorie des nombres*, 1830), nos quais dá uma formulação da lei da reciprocidade quadrática. Também fez trabalhos importantes sobre geodesia e sobre astronomia teórica; era um assíduo calculador de tabelas, como o foi Gauss; formulou em 1806 o método dos mínimos quadrados e estudou a atracção de elipsóides, mesmo daqueles que não são superfícies de revolução. Aqui introduziu as «funções de Legendre». Também partilhou do interesse de Gauss pelos integrais elípticos e pelos integrais eulerianos, assim como na fundamentação e nos métodos da geometria euclidiana.

Embora Gauss tivesse penetrado mais profundamente na natureza de todos estes campos matemáticos, Legendre produziu trabalhos de grande importância. Os seus textos, bastante completos, constituíram durante muito tempo uma autoridade, especialmente os *Exercises du calcul intégral* (3 vols., 1811-19) e o *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (1827-32), que ainda é um trabalho modelo. Nos seus *Éléments de géométrie* (1794) quebrou com os ideais platónicos de Euclides e apresentou um texto de geometria elementar baseado nas exigências da educação moderna. Este livro teve muitas edições e foi traduzido em muitas línguas; a sua influência foi duradoura.

4

Os começos de um novo período na história da matemática francesa podem ser datados talvez com o estabelecimento das escolas e academias militares, que teve lugar durante a última parte do século XIX. Estas escolas, algumas das quais também foram fundadas fora de França (Turim, Wolwich), davam uma atenção considerável ao ensino da matemática como parte da

formação dos engenheiros militares. Lagrange começou a sua carreira na escola de artilharia de Turim; Legendre e Laplace ensinavam na escola militar de Paris e Monge na de Mézières. Carnot era capitão de engenharia. O interesse de Napoleão pela matemática tem origem nos seus tempos de estudante nas Academias Militares de Brienne e Paris. Durante a invasão da França pelos exércitos realistas tornou-se manifesta a necessidade de uma instrução da engenharia militar mais centralizada. Isto levou à fundação da Ecole Polytechnique de Paris (1794), uma escola que rapidamente se tornou uma instituição directriz para o estudo geral da engenharia, tornando-se eventualmente o modelo de todas as escolas militares e de engenharia dos inícios dos século XIX, incluindo a de West Point, nos Estados Unidos. Uma instrução em matemática teórica e aplicada fazia parte integral do currículo. Era dada ênfase quer à pesquisa quer ao ensino. Os melhores cientistas de França foram induzidos a colaborar com esta escola; muitos grandes matemáticos franceses eram estudantes, professores ou examinadores na Ecole Polytechnique[138].

A instrução nesta instituição, assim como noutras escolas técnicas, exigia um novo tipo de livros. Os tratados eruditos para iniciados, que eram característicos do período de Euler, tinham de ser suplementados com manuais escolares. Alguns dos melhores livros de texto do início do século XIX foram preparados para a instrução na Ecole Polytechnique ou para instituições semelhantes. A sua influência pode ser detectada nos nossos textos actuais. Um bom exemplo desses manuais é o *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (2 vols., 1797), escrito por

---

[138] Cf. C. G. J. Jacobi, *Werke*, vol. 7, p. 355 (lição dada em 1835). A Polytechnique foi tema de muitos estudos relacionados com o seu papel na formação da matemática no começo do século XIX, tanto na investigação como na educação. Cf. H. Wussing, *Pädagogik*, vol. 13, 1958, pp. 646-662. Para um quadro geral ver M. P. Crosland, *The Society of Arcueil*, Cambridge, Mass., 1967. A residência de Laplace em Arcueil, perto de Paris, foi de 1806 a 1813 um centro de discussões científicas e sociais.

Sylvestre François Lacroix e pelo qual gerações inteiras aprenderam cálculo. Já mencionámos os livros de Legendre. Um exemplo mais é o texto de geometria descritiva de Monge, que ainda é seguido em muitos livros actuais sobre este assunto.

5

Gaspard Monge, director da Ecole Polytechnique, era o líder científico do grupo de matemáticos que estavam ligados àquele instituto. Tinha começado a sua carreira como instrutor na academia militar de Mézières (1768-89), onde as suas lições sobre fortificações lhe deram a oportunidade de desenvolver a geometria descritiva como ramo especial da geometria. Publicou as suas lições em *Géométrie descriptive* (1795-99). Em Mézières também começou a aplicar o cálculo a curvas e superfícies no espaço e os seus textos sobre este assunto foram mais tarde publicados em *Application de l'analyse à la géométrie* (1809), o primeiro livro sobre geometria diferencial, embora ainda não na forma que é usual no presente. Monge foi dos primeiros matemáticos modernos em quem reconhecemos um especialista: um geómetra — mesmo o seu tratamento de equações diferenciais parciais tem uma marca clara da geometria.

Com a influência de Monge, a geometria começou a florescer na Ecole Polytechnique. Na geometria descritiva de Monge está o núcleo da geometria projectiva e a sua maestria em métodos algébricos e analíticos na aplicação a curvas e superfícies contribuiu muito para a geometria diferencial e analítica. Jean Hachette e Jean Baptiste Biot desenvolveram a geometria analítica das cónicas e quádricas; no *Essai de géométrie analytique*, de Biot (1802), começamos, por fim, a reconhecer os nossos textos actuais de geometria analítica. O discípulo de Monge, Charles Dupin, um jovem engenheiro naval do período de Napoleão, aplicou os métodos do seu mestre à teoria das superfícies, onde encontrou as linhas assimptóticas e conjugadas. Dupin veio a ser professor de geometria em Paris e durante a sua longa vida



GASPARD MONGE (1746-1818)



EVARISTE GALOIS (1811-1832)
(De um desenho raro que o mostra tal como era
pouco antes do seu duelo fatal, com a idade de 21 anos)

destacou-se como político, assim como impulsionador da indústria. A «indicatriz de Dupin» e as «cíclidas de Dupin» recordam-nos os primeiros interesses deste homem, cujos *Développements de géométrie* (1813) e *Applications de géométrie* (1825) contêm um grande número de resultados interessantes.

O discípulo mais original de Monge foi Victor Poncelet. Teve a oportunidade de reflectir sobre os métodos do seu professor durante o ano de 1813, quando levou uma vida isolada de prisioneiro na Rússia, depois da derrota da Grande Armée de Napoleão. A Poncelet atraía-o o lado sintético da geometria de Monge e, por isso, foi levado a um modo de pensar já sugerido dois séculos antes por Desargues. Poncelet tornou-se o fundador da geometria projectiva. O *Traité des propriétés projectives des figures*, de Poncelet, surgiu em 1822. Este grande volume contém todos os conceitos essenciais que fundamentam a nova forma de geometria, tal como razão harmónica, perspectividade, projectividade, involução e até os pontos circulares no infinito. Poncelet sabia que os focos de uma cónica podem ser considerados intersecções de tangentes à cónica que passam por estes pontos circulares. O *Traité* também contém a teoria dos polígonos inscritos numa cónica e circunscritos noutra (o chamado «problema do fecho», de Poncelet). Embora este livro seja o primeiro tratado completo de geometria projectiva, durante as décadas seguintes, esta geometria atingiu um tal grau de perfeição que a tornou um exemplo clássico de estrutura matemática bem integrada.

6

Monge, embora fosse um homem de estritos princípios democráticos, permaneceu leal a Napoleão, em quem reconheceu o executor dos ideais da Revolução. Em 1815, quando os Bourbons regressaram, Monge perdeu o seu lugar e pouco mais tarde morreu. A Ecole Polytechnique, porém, continuou a florescer dentro do espírito de Monge. A própria natureza do ensino tornou

difícil a separação entre matemática pura e aplicada. A mecânica recebeu toda a atenção e a física matemática começou, por fim, a emancipar-se das «catóptricas» e das «dióptricas» dos antigos. Étienne Malus descobriu a polarização da luz (1810) e Augustin Fresnel restabeleceu a teoria ondulatória de Huygens (1821). André Marie Ampère, que tinha feito um trabalho importante sobre equações diferenciais às derivadas parciais, tornou-se, depois de 1820, o grande pioneiro do electromagnetismo. Estes investigadores trouxeram muitos benefícios directos e indirectos à matemática: um exemplo é o desenvolvimento da geometria dos raios luminosos, de Malus, levado a cabo por Dupin, o que ajudou a modernizar a óptica geométrica e também contribuiu para a geometria das congruências de linhas.

A *Mécanique analytique*, de Lagrange, foi estudada fielmente e os seus métodos experimentados e aplicados. A estática atraiu Monge e os seus discípulos, devido às suas possibilidades geométricas, e vários textos sobre estática apareceram no decorrer dos anos, incluindo um do próprio Monge (1788, muitas edições). O carácter geométrico da estática foi claramente ressaltado por Louis Poinsot, membro durante muitos anos do quadro superior da instrução pública de França. Os seus *Éléments de statique* (1804) e *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (1834) acrescentaram ao conceito de força o de *torque* («couple»)[139], representaram a teoria dos momentos de inércia de Euler através do elipsóide de inércia e analisaram o movimento deste elipsóide quando o corpo rígido se move no espaço ou gira à volta de um ponto fixo. Poncelet e Coriolis deram um toque geométrico à mecânica analítica de Lagrange; ambos, tal como Poinsot, realçaram as aplicações da mecânica à teoria das máquinas simples. A «aceleração de Coriolis», que aparece quando um corpo se move num sistema acelerado, é um exemplo de tal interpretação geométrica dos resultados de Lagrange (1835).

---

[139] Em português, «torque» ou «binário». *(N. do T.)*

Os principais matemáticos relacionados com os primeiros anos da Ecole Polytechnique foram — à parte Lagrange e Monge — Siméon Poisson, Joseph Fourier e Augustin Cauchy. Os três estavam profundamente interessados na aplicação da matemática à mecânica e à física e foram conduzidos pelo seu interesse a descobertas nas matemáticas «puras». A produtividade de Poisson é indicada pela frequência com que aparece o seu nome nos nossos livros de texto: os «parênteses de Poisson» nas equações diferenciais, a «constante de Poisson» na elasticidade, o «integral de Poisson» e a «equação de Poisson» na teoria do potencial. Esta «equação de Poisson», $\Delta V = 4\pi P$, foi o resultado da descoberta de Poisson (1812) de que a equação de Laplace, $\Delta V = 0$, apenas era válida fora da região onde se encontram massas; a prova exacta para massas de densidade variável não era conhecida, até que Gauss a deu em *Allgemeine Lehrsätze* (1839-40). O *Traité de mécanique* (1811) foi escrito no espírito de Lagrange e Laplace, mas continha muitas inovações, tal como o uso de coordenadas de impulsão, $p_i = \partial T/\partial q_i$, que mais tarde inspirou os trabalhos de Hamilton e Jacobi. O seu livro de 1837 contém a «lei de Poisson» na teoria das probabilidades, derivada originalmente como uma aproximação à lei binomial de Bernoulli para o caso de probabilidades pequenas, mas agora reconhecida como uma lei fundamental nos problemas de radiação, tráfego e distribuição em geral (ver cap. VII, secção 6, atrás).

Fourier é recordado, sobretudo, como o autor da *Théorie analytique de la chaleur* (1822)[140]. Esta é a teoria matemática da condução do calor e é essencialmente o estudo da equação $\Delta U = k\partial U/\partial t$. Em virtude da generalidade do método, este livro tornou-se a fonte de todos os métodos modernos na física matemática, envolvendo a integração de equações diferenciais parciais com condições de fronteira. Este método consiste no uso de séries trigonométricas, que tinha sido causa de discussão entre

---

[140] Traduzido como *The Analytic Theory of Heat* por Alexander Freeman.

Euler, d'Alembert e Daniel Bernoulli. Fourier tornou a situação muito clara. Ele estabeleceu o facto de uma função «arbitrária» (uma função capaz de ser representada por um arco de uma curva contínua ou pela sucessão de tais arcos) poder ser representada por uma série trigonométrica da forma $\Sigma_{n=0}^{\infty}(A_n \cos nax + B_n \operatorname{sen} nax)$. Apesar das observações de Euler e Bernoulli, a ideia era tão nova e surpreendente na época das investigações de Fourier que se disse que, quando ele expôs as suas ideias pela primeira vez, em 1807, se confrontou com a oposição vigorosa de nada menos que o próprio Lagrange.

As «séries de Fourier» tornavam-se agora um instrumento firme para a teoria das equações diferenciais às derivadas parciais com condições de fronteira. Também foram estudadas pelo seu interesse intrínseco. A sua manipulação por Fourier abriu a questão de saber o que se entende por uma «função». Esta foi uma das razões pelas quais os matemáticos do século XIX acharam necessário analisar melhor questões relacionadas com o rigor da prova matemática e a fundamentação dos conceitos matemáticos em geral[141]. Esta tarefa, no caso específico das séries de Fourier, foi empreendida por Dirichlet e Riemann.

7

As várias contribuições de Cauchy para a teoria da luz e para a mecânica foram obscurecidas pelo êxito dos seus trabalhos em análise, mas não devemos esquecer que, juntamente com Navier, ele foi um dos fundadores da teoria matemática da elasticidade. A sua principal glória é a teoria das funções de variável complexa e a sua insistência no rigor da análise. Funções de variável complexa já tinham sido construídas anteriormente, nomeadamente por d'Alembert, que, num artigo sobre resistência de

---

[141] P. E. B. Jourdain, «Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics», in *Proc. Intern. Congress of Math.*, vol. II, Cambridge, 1912, pp. 526-527.

fluidos em 1752, tinha mesmo obtido aquilo que agora nós chamamos «equações de Cauchy-Riemann». Com Cauchy, a teoria das funções complexas deixou de ser apenas um instrumento útil para a hidrodinâmica e aerodinâmica, para se constituir num campo novo e independente de pesquisa matemática. As investigações de Cauchy sobre este assunto apareceram umas atrás das outras depois de 1814. Um dos seus artigos mais importantes é a *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* (1825). Neste artigo surgiu o teorema integral de Cauchy com resíduos. O teorema que afirma que toda a função regular $f(z)$ pode ser desenvolvida em torno de cada ponto $z = z_0$, numa série convergente num círculo que passa através do ponto singular mais próximo de $z = z_0$, foi publicado em 1831, ano em que Gauss publicou a sua teoria aritmética dos números complexos. A extensão de Laurent do teorema de Cauchy sobre séries foi publicada em 1843, quando também já era conhecida por Weierstrass. Estes factos mostram que à teoria de Cauchy não houve resistência profissional; a teoria das funções complexas foi completamente aceite desde a sua origem.

Cauchy, tal como os seus contemporâneos —Gauss, Abel e Bolzano—, pertence aos pioneiros do moderno rigor das matemáticas. O século XVIII tinha sido essencialmente um período de experimentação, no qual os resultados surgiram com grande abundância. Os matemáticos deste período não prestaram muita atenção à fundamentação dos seus trabalhos — *«allez en avant, et la foi vous viendra»*[142], supõe-se ter sido dito por d'Alembert. Quando se preocuparam com o rigor, tal como Euler e Lagrange ocasionalmente, os seus argumentos nem sempre foram convincentes. Tinha chegado uma época de grande reflexão sobre o significado dos resultados. O que era uma «função» de uma variável real, que mostrava um comportamento tão diferente no caso das séries de Fourier e no caso das séries de potências? Qual era a relação com as funções de variável com-

[142] «vão em frente e a fé surgirá.»

plexa, completamente diferentes no seu comportamento? Estas questões trouxeram novamente ao primeiro plano do pensamento matemático problemas que não estavam resolvidos acerca da fundamentação do cálculo e da existência do infinito potencial e actual[143]. Aquilo que Eudoxo fizera no período posterior à queda da democracia ateniense começavam a fazer Cauchy e os seus meticulosos contemporâneos no período do desenvolvimento industrial. Esta diferença na estrutura social produziu resultados diferentes e, enquanto os sucessos de Eudoxo criaram uma tendência para reprimir a produtividade, o êxito dos reformadores modernos estimulava a produtividade matemática a um grau elevado. Cauchy e Gauss foram seguidos por Weierstrass e Cantor. Cauchy deu a fundamentação do cálculo tal como nós o aceitamos agora nos nossos textos. Pode ser encontrada no seu *Cours d'analyse* (1821) e no *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (vol. I, 1823). Cauchy utilizou o conceito de limite de d'Alembert para definir a derivada de uma função e baseá-la numa fundamentação mais sólida do que aquela que os seus predecessores foram capazes de fazer.

Começando com a definição de um «limite», Cauchy deu exemplos, tal como o limite de sen α/α para $\alpha = 0$. Começou por definir uma *variable infiniment petite* como um número variável que tinha zero como limite; e depois postulou que Δy e Δx *seront des quantités infinement petites*. E então escreveu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

e chamou ao limite para $i \to 0$ a *fonction derivée*, y' *ou* $f'(x)$. Fazendo $i = \alpha h$, com α *infiniment petite* e h uma *quantité finie:*

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h .$$

[143] P. E. B. Jourdain, «The Origin of Cauchy's Conception of a Definite Integral and of the Continuity of a Function», in *Isis*, vol. 1, 1913, pp. 661703 (ver também *Bibl. Math.*, vol. 6, 1905, pp. 190-207).

chamando a h a *différentielle de la fonction* $y = f(x)$. Além disso, $dy = df(x) = hf'(x)$; $dx = h$[144].

Cauchy, embora utilizasse as notações de Lagrange e muitas das suas contribuições para a teoria das funções reais, não usou a fundamentação algébrica de Lagrange. O teorema do valor médio e o resto da série de Taylor foram aceites tal como Lagrange os tinha obtido, mas as séries eram agora discutidas tendo em conta a sua convergência. Vários critérios de convergência na teoria das séries infinitas ficaram associados ao nome de Cauchy. Encontramos nos seus trabalhos o nosso conceito moderno de continuidade. Existiam passos definidos nos seus livros em direcção à «aritmetização» da análise que mais tarde se tornou o centro das investigações de Weierstrass. Cauchy também deu a primeira prova de existência para a solução de uma equação diferencial e de um sistema de equações (1836). Desta maneira, Cauchy deu, por fim, um começo de resposta a uma série de problemas e paradoxos que tinham obcecado os matemáticos desde os tempos de Zenão, não os negando nem os ignorando, mas sim criando uma técnica matemática pela qual era possível colocá-los no devido lugar.

Cauchy, tal como o seu contemporâneo Balzac (com quem partilhou uma capacidade infinita de trabalho), era um legitimista e realista. Ambos tinham uma compreensão tão profunda dos valores que, apesar das suas ideias reaccionárias, muitos dos seus trabalhos conservaram um lugar fundamental. Cauchy abandonou a sua cadeira na Ecole Polytechnique depois da revolução de 1830 e passou alguns anos em Turim e Praga; voltou a Paris em 1838. Depois de 1848 foi-lhe permitido ficar a ensinar sem ter de prestar juramento de fidelidade ao novo governo. A sua produtividade foi tão grande que a Academia Francesa teve de restringir o tamanho de todos os textos de Cauchy envia-

---

[144] *Résumé*, vol. I, 1823, capítulo intitulado «Calcul différentiel», pp. 13-27. É apresentada uma análise estrita deste método em M. Pasch, *Mathematik am Ursprung*, Leipzig, 1927, pp. 47-73.

dos para os *Comptes-Rendus* a fim de cobrir a sua produção. Diz-se que ele perturbou de tal forma Laplace, quando leu à Academia Francesa o seu primeiro artigo sobre convergência de séries, que o grande homem voltou a casa para testar as séries da sua *Mécanique céleste.* Verificou, segundo parece, que não tinham sido cometidos grandes erros.

8

Este ambiente parisiense, com a sua actividade matemática intensa, produziu, por volta de 1830, um génio de primeira ordem que, tal como um cometa, desapareceu tão rapidamente como tinha aparecido. A Evariste Galois, filho de um presidente de município de uma pequena cidade perto de Paris, foi recusada duas vezes a admissão à Ecole Polytechnique, vindo depois, por fim, a entrar na Ecole Normale, mas apenas para ser expulso. Sentiu-se oprimido pelos representantes da ciência oficial; um dos artigos que enviou para publicação para a Academia foi-lhe devolvido por Cauchy e um novo texto, escrito na esperança de obter o *grand prix,* perdeu-se. O seu espírito ardente procurou manter um difícil equilíbrio entre a sua aversão ao «sistema» e a paixão pela ciência e pela democracia. Galois participou como republicano na revolução de 1830, passou alguns meses na prisão e foi, pouco depois, morto num duelo, aos 21 anos de idade. Alguns dos seus trabalhos só foram publicados muito depois da sua morte. Na véspera do duelo escreveu a um amigo um resumo das suas descobertas na teoria das equações. Este documento patético, no qual Galois pede ao amigo que entregue as suas descobertas aos principais matemáticos, terminava com estas palavras:

> Contacta Jacobi ou Gauss para darem a sua opinião não sobre a verdade, mas sobre a importância dos teoremas. Depois existirá alguém, espero, que ache vantajoso decifrar todo este emaranhado.

Esse emaranhado *(gâchis)* continha nada menos do que a teoria dos grupos, a chave da álgebra e da geometria modernas.

As ideias já tinham sido antecipadas de uma certa maneira por Lagrange e pelo italiano Ruffini, mas Galois tinha a concepção de uma completa teoria dos grupos. Expressou as propriedades fundamentais do grupo de transformações a que pertencem as raízes de uma equação algébrica e demonstrou que o corpo de racionalidade dessas raízes era determinado por aquele grupo. Galois salientou a posição central ocupada pelos subgrupos invariantes. Os problemas antigos, como a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a solução da equação cúbica e biquadrática, assim como o problema da resolução de uma equação algébrica, de qualquer grau, encontraram o seu lugar natural na teoria de Galois. A carta de Galois, tanto quanto sabemos, nunca foi entregue a Gauss ou Jacobi. Nunca chegou ao público matemático, até que Liouville publicou a maior parte dos trabalhos de Galois no *Journal de mathématiques,* de 1846, numa altura em que Cauchy já tinha começado a publicar sobre a teoria dos grupos (1844-46). Foi somente então que alguns matemáticos começaram a interessar-se pelas teorias de Galois. A compreensão total da importância de Galois só veio através do *Traité des substitutions* (1870), de Camille Jordan, e das publicações subsequentes de Klein e Lie. Agora, o princípio unificador de Galois é reconhecido como uma das grandes realizações da matemática do século XIX[145].

Galois também tinha ideias sobre os integrais de funções algébricas de uma variável, que agora chamamos «integrais abelianos». Sobre este assunto, a sua maneira de pensar está próxima da de Riemman. Podemos especular sobre a possibilidade de, se Galois tivesse vivido mais, os matemáticos modernos poderem ter recebido uma inspiração mais profunda de Paris e da escola de Lagrange do que de Gotinga e da escola de Gauss.

---

[145] Ver G. A. Miller, *History of the Theory of Groups to 1900. Collected Works*, vol. I, 1935, pp. 427-467. H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlim, 1969; sobre Jordan ver H. Lebesgue, *Notices d'histoire des mathématiques*, Genebra, 1958, pp. 40-65.

Nos anos 20 apareceu outro jovem génio, Niels Henrik Abel, filho de um pastor protestante norueguês. A vida curta de Abel foi quase tão trágica como a de Galois. Quando estudante em Cristiânia, pensou, durante algum tempo, que tinha resolvido a equação do quinto grau, mas corrigiu-se a si próprio num opúsculo publicado em 1824. Era o famoso texto no qual Abel provava a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau por meio de radicais— um problema que tinha ocupado os matemáticos desde os tempos de Bombelli e Viète (uma prova de 1799 do italiano Paolo Ruffini foi considerada, por Poisson e outros matemáticos, demasiado vaga). Abel obteve um estipêndio que lhe permitiu deslocar-se a Berlim, Itália e França. Mas, torturado pela pobreza durante a maior parte da sua vida e incapaz de ter uma posição digna dos seus talentos, estabeleceu poucos contactos matemáticos pessoais e morreu (1829) pouco tempo depois de regressar à sua terra natal, no momento em que a sua grandeza começava a ser reconhecida por Legendre, Jacobi e Gauss.

Neste período de viagens, Abel escreveu vários artigos que contêm os seus trabalhos sobre convergência de séries, sobre os «integrais abelianos» e sobre funções elípticas. Os teoremas de Abel na teoria das séries infinitas mostram que ele foi capaz de assentar esta teoria numa fundamentação segura. «Pode imaginar algo mais horrível que sustentar que $0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n +$, etc., sendo n um inteiro positivo?», escreveu ele a um amigo, e continuou:

> É difícil encontrar em matemática uma série infinita cuja soma seja determinada duma maneira rigorosa. (Carta a Holmboe, 1826).

As investigações de Abel sobre funções elípticas conduziram a uma curta, mas excitante, competição com Jacobi. Gauss, nas suas notas privadas, já tinha descoberto que a inversão de integrais elípticos levava a funções univalentes duplamente periódicas, mas nunca publicara as suas ideias. Legendre, que tinha

trabalhado muito sobre os integrais elípticos, tinha omitido este ponto e ficou profundamente impressionado quando, já velho, leu as descobertas de Abel. Abel teve a sorte de encontrar um jornal novo desejoso de publicar os seus artigos; o primeiro volume do *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, editado por Crelle, continha não menos de cinco dos artigos de Abel. No segundo volume (1827) apareceu a primeira parte das *Recherches sur les fonctions elliptiques*, com a qual começa a teoria das funções duplamente periódicas.

August Leopold Crelle, arquitecto e autor do projecto do primeiro caminho-de-ferro da Prússia, é ainda conhecido pelas suas tabelas, *Rechentafeln* (1820), e como fundador do ainda existente *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1826), um dos primeiros jornais puramente matemáticos, onde Crelle encorajou jovens matemáticos, tais como Abel e Steiner. Tomou o nome de *Annales de mathématiques pures et appliquées*, de Gergonne (depois de 1836, *Journal...*; ver secção 16 adiante).

Falámos da equação integral de Abel e do teorema de Abel sobre a soma de integrais de funções algébricas que conduzem às funções abelianas. Os grupos comutativos são chamados «grupos abelianos», o que indica como as ideias de Galois estavam próximas das de Abel.

10

Em 1829, ano em que Abel morreu, Carl Gustav Jacob Jacobi publicou *Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum*. O autor era um jovem professor da Universidade de Königsberg. Era filho de um banqueiro de Berlim e membro de uma família distinta; seu irmão Moritz, em Sampetersburgo, foi um dos primeiros cientistas russos que fizeram experiências em electricidade. Depois de estudar em Berlim, Jacobi ensinou em Königsberg de 1826 a 1843. Nessa altura passou algum tempo em Itália, tentando refazer a sua saúde, e acabou a sua carreira como professor na Universidade de Berlim, morrendo em 1851, com

46 anos. Era um arguto pensador liberal, um grande professor e um cientista com tanta energia e clareza de pensamento que raros foram os campos da matemática em que não tocou.

Jacobi baseou a sua teoria das funções elípticas em quatro funções definidas por séries infinitas e chamadas «funções teta». As funções duplamente periódicas *sn u*, *cn u* e *dn u* são quocientes das funções teta; satisfazem certas identidades e teoremas de adição semelhantes aos das funções seno e coseno da trigonometria ordinária. Os teoremas de adição das funções elípticas também podem ser considerados como casos especiais do teorema de Abel sobre a soma de integrais de funções algébricas. A questão que agora surgia era se os integrais hiperelípticos podiam ser invertidos da mesma maneira que os integrais elípticos o tinham sido para produzir funções elípticas. A solução foi encontrada por Jacobi em 1832, quando publicou o resultado de que a inversão podia ser feita com funções de mais de uma variável. Assim nascia a teoria das funções abelianas a *p* variáveis.

Sylvester deu o nome de «jacobiano» ao determinante funcional para prestar homenagem aos trabalhos de Jacobi sobre álgebra e sobre a teoria da eliminação. O mais conhecido dos trabalhos de Jacobi sobre este assunto é *De formatione et proprietatibus determinantium* (1841), que tornou a teoria dos determinantes património comum dos matemáticos.

A ideia de determinante é muito antiga — data essencialmente de Leibniz (1693), do matemático suíço Gabriel Cramer (1750) e de Lagrange (1773); o nome deve-se a Cauchy (1812). Y. Mikami salientou que o matemático japonês Seki Kowa tinha a ideia de determinante antes de 1683[146]. Somos assim levados a

---

[146] Y. Mikami, «On the Japanese Theory of Determinants», in *Isis*, vol. 2, 1914, pp. 9-36. De acordo com J. Needham (*Science and Civilization in China*, vol. III, Cambridge, 1959, p. 117), a melhor transcrição do nome é Seki Takakusu. Escreveu sobre a solução numérica das equações algébricas de grau *n* e sobre a rectificação de arco circular. O artigo do *DSB* dá o nome de Seki Takakazu. A influência da tradição chinesa na sua matemática é clara.

recordar os métodos matriciais desenvolvidos pelos matemáticos chineses do período Song: esses trabalhos foram estudados por Seki.

Aprecia-se talvez melhor Jacobi através das suas belas lições sobre Dinâmica *(Vorlesungen über Dynamik)*, publicadas em 1866 segundo notas de aula datando de 1842-43. Estão escritas na tradição da escola francesa de Lagrange e Poisson, mas têm um manancial de novas ideias. Aqui encontramos as investigações de Jacobi sobre equações diferenciais às derivadas parciais de primeira ordem e a sua aplicação a equações diferenciais da dinâmica. Um capítulo interessante de *Vorlesungen über Dynamik* é a determinação das geodésicas de um elipsóide; o problema conduz a uma relação entre dois integrais abelianos.

11

As lições de Jacobi sobre Dinâmica conduzem-nos a outro matemático, cujo nome é muitas vezes ligado ao de Jacobi, William Rowan Hamilton (não confundir com o seu contemporâneo William Hamilton, o filósofo de Edimburgo). Viveu toda a sua vida em Dublim, onde nasceu, sendo filho de irlandeses. Entrou no Trinity College, tornou-se astrónomo real da Irlanda em 1827, com 21 anos, e manteve esse lugar até à sua morte, em 1865. Quando jovem, aprendeu as matemáticas do continente —ainda uma novidade no Reino Unido—, estudando Clairaut e Laplace, e revelou assim grande maestria dos novos métodos em trabalhos bastante originais sobre óptica e dinâmica. A sua teoria dos raios ópticos (1824) era mais do que uma simples geometria diferencial de congruências de linhas; era também uma teoria de instrumentos ópticos e permitiu que Hamilton predissesse as refracções cónicas nos cristais biaxiais. No seu trabalho apareceu a «função característica», que se tornou a ideia orientadora do *General Method in Dynamics*, publicado em 1834-35. A ideia de Hamilton era derivar a óptica e a dinâ-

mica de um princípio geral. Euler, na defesa de Maupertuis, já tinha mostrado como a estacionaridade do integral da acção poderia servir este propósito. Hamilton, de acordo com esta sugestão, fez da óptica e da dinâmica dois aspectos do cálculo de variações. Procurou o valor estacionário de certos integrais e considerou-os como função dos seus limites. Era a função «característica» ou «principal», que satisfazia duas equações diferenciais às derivadas parciais. Uma dessas equações diferenciais, que é usualmente escrita

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0$$

foi escolhida especialmente por Jacobi para as suas lições sobre dinâmica e é agora conhecida como a equação de Hamilton-Jacobi. Este facto obscureceu a importância da função característica de Hamilton, que ocupava o lugar central na sua teoria como um meio de unificar a mecânica e a física matemática. Foi redescoberta em 1895 pelo astrónomo Heinrich Bruns, de Leipzig, no caso da óptica geométrica e, como *eikonal*, foi utilizada na teoria dos instrumentos ópticos.

A parte dos trabalhos de Hamilton sobre dinâmica que se integrou nas matemáticas é, em primeiro lugar, a forma «canónica», $\dot{q} = \partial H/\partial p$, $\dot{p} = -\partial H/\partial q$, na qual escreveu as equações da dinâmica. A forma canónica e a equação diferencial de Hamilton-Jacobi possibilitaram que Lie estabelecesse as relações entre a dinâmica e as transformações de contacto. Outra ideia de Hamilton, igualmente aceite desde então, foi a derivação das leis da física e da mecânica a partir da variação de um integral. A relatividade moderna, assim como a mecânica quântica, baseou-se no princípio das «funções de Hamilton».

O ano de 1843 foi um ponto de viragem na vida de Hamilton. Neste ano encontrou os quaterniões, ao estudo dos quais devotou a última parte da sua vida. Discutiremos esta descoberta mais tarde.

Peter Lejeune Dirichlet estava estreitamente associado a Gauss e Jacobi, assim como aos matemáticos franceses. Ele viveu de 1822 a 1827 como professor particular e encontrou Fourier, cujo livro estudou; também se familiarizou com as *Disquisitiones arithmeticae*, de Gauss. Mais tarde ensinou na Universidade de Breslau e em 1855 sucedeu a Gauss em Gotinga. O seu conhecimento pessoal da matemática francesa e alemã e dos seus matemáticos tornou-o o homem apropriado para servir de intérprete de Gauss e submeter as séries de Fourier a uma análise muito profunda. O belo livro *Vorlesungen über Zahlentheorie*, de Dirichlet (1863), ainda é uma das melhores introduções às investigações de Gauss na teoria dos números. Também contém muitos resultados novos. Em 1840, Dirichlet mostrou como aplicar toda a potência da teoria das funções analíticas a problemas da teoria dos números; foi então que ele introduziu as «séries de Dirichlet». Também estendeu a noção de irracionalidades quadráticas a domínios algébricos de racionalidade gerais.

Dirichlet deu a primeira prova rigorosa da convergência das séries de Fourier, e desta forma contribuiu para uma compreensão correcta da noção de função[147]. Também introduziu no cálculo das variações o chamado «princípio de Dirichlet», que postula a existência de uma função v que minimiza o integral $\int[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]\, d\tau$ sob dadas condições de fronteira. Era uma modificação de um princípio que Gauss tinha introduzido na sua teoria do potencial de 1839-40 e mais tarde serviu a Riemann como um instrumento poderoso na resolução de problemas da teoria do potencial. Já mencionámos que terá sido Hilbert quem estabeleceu definitiva e rigorosamente a validade deste princípio (secção 2, atrás)[148].

[147] Ver A. F. Monna, «The Concept of function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions Between Baire, Borel and Lebesgue», in *AHES*, vol. 9, 1972, pp. 51-84.

[148] A. F. Monna, *Dirichlet's Principle*, Utreque, 1975.

Com Bernard Riemann, o sucessor de Dirichlet em Gotinga, chegamos ao homem que, mais do que qualquer outro, influenciou o curso da matemática moderna. Riemann era filho de um pastor protestante e estudou na Universidade de Gotinga, onde em 1851 obteve o grau de doutor. Em 1854 tornou-se Privatdozent e em 1859 professor na mesma Universidade. Era adoentado, como Abel, e passou os seus últimos dias em Itália, onde morreu em 1866, com 40 anos de idade. Na sua curta vida publicou apenas um número relativamente pequeno de artigos, mas cada um deles era —e é— importante.

Em 1851 apareceu a tese de doutoramento de Riemann sobre a teoria das funções complexas $u + iv = f(x + iy)$. Tal como d'Alembert e Cauchy, Riemann foi influenciado por considerações hidrodinâmicas. Aplicou o plano (xy) conformemente sobre o plano (uv) e estabeleceu a existência de uma função capaz de transformar qualquer região simplesmente conexa de um plano em qualquer outra região simplesmente conexa doutro plano. Isto conduziu à concepção das superfícies de Riemann, a qual introduziu considerações topológicas na análise. Nesta altura, a topologia era ainda um assunto em que quase não se tinha falado e sobre o qual J. B. Listing tinha publicado um artigo nos *Göttinger Studien*, em 1847. Riemann demonstrou a sua importância central para a teoria das funções complexas. Esta tese também clarificou a definição de Riemann de uma função complexa [holomorfa]: as suas partes real e imaginária tinham de satisfazer as «equações de Cauchy-Riemann» $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ numa dada região e, além disso, tinham de satisfazer certas condições na fronteira e sobre as singularidades.

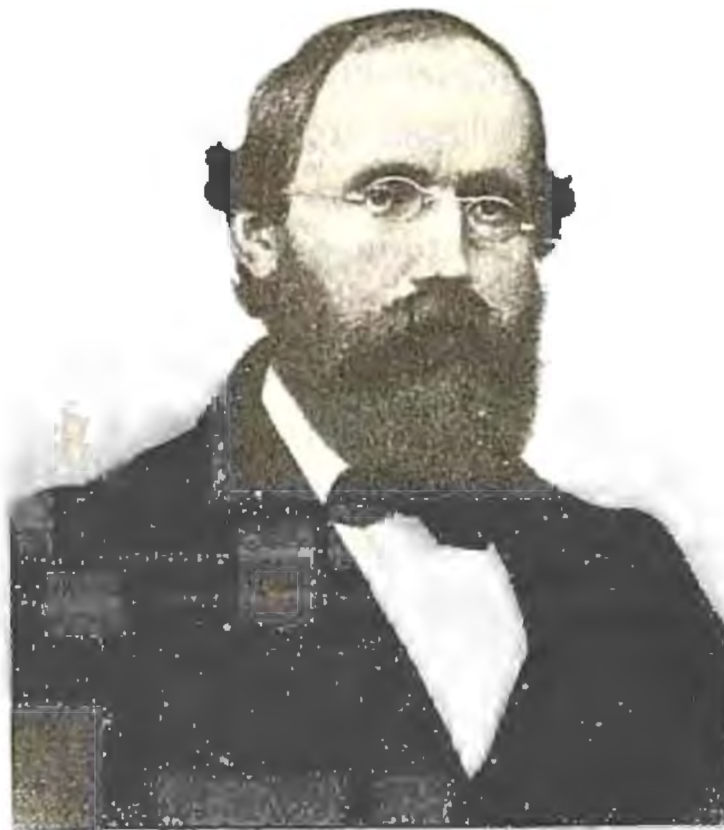
Riemann aplicou as suas ideias às funções hipergeométricas e abelianas (1857), usando livremente o princípio de Dirichlet (tal como lhe chamou). Entre os seus resultados encontrava-se a descoberta do género de uma superfície de Riemann como um invariante topológico e como um meio de classificar as funções abelianas. Um artigo postumamente publicado aplica as suas

ideias à teoria das superfícies mínimas (1867). A este ramo da actividade de Riemann também pertencem as investigações sobre funções modulares elípticas e séries θ com p variáveis independentes, assim como aquelas sobre equações diferenciais lineares com coeficientes algébricos.

Riemann tornou-se Privatdozent em 1850, apresentando não menos do que dois artigos fundamentais, um sobre séries trigonométricas e os fundamentos da análise e o outro sobre os fundamentos da geometria. O primeiro destes artigos analisava as condições de Dirichlet para o desenvolvimento de uma função em série de Fourier. Uma destas condições era que a função fosse «integrável». Mas o que é que isso significava? Cauchy e Dirichlet já tinham dado algumas respostas; Riemann substitui-as pela sua, de maior âmbito. Deu aquela definição que agora conhecemos como «integral de Riemann» e que foi substituída somente no século XX pelo integral de Lebesgue. Riemann demonstrou como funções definidas por séries de Fourier podem exibir propriedades tais como possuir um número infinito de máximos e mínimos, que os matemáticos mais antigos não teriam aceite na sua definição de função. O conceito de função começou seriamente a emancipar-se da *curva quaecunque libero manus ductu descripta*[149], de Euler. Nas suas lições, Riemann deu um exemplo de uma função contínua sem derivada em nenhum ponto; um exemplo de uma tal função, dado por Weierstrass, foi publicado em 1875. Os matemáticos recusaram levar a sério tais funções e chamaram-lhes funções «patológicas»; a análise moderna demonstrou como estas funções eram naturais e como Riemann, mais uma vez, penetrava num campo fundamental da matemática.

O outro artigo de 1854 trata das hipóteses que servem de fundamento à geometria. O espaço era introduzido como uma variedade topológica de um número arbitrário de dimensões; numa

[149] «Qualquer curva descrita pelo movimento livre da mão.» (*Inst. Calc. integr.*, vol. III, § 301). Ver atrás nota 128.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN
(1826-1866)



KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

tal variedade era definida uma métrica através de uma forma diferencial quadrática. Riemann, na sua análise, tinha definido uma função complexa pelo seu comportamento local; neste artigo definiu o carácter do espaço da mesma maneira. O princípio unificador de Riemann não só lhe possibilitou classificar todas as formas existentes de geometria, incluindo a ainda muito obscura geometria não euclidiana, mas também permitiu a criação de um grande número de novos tipos de espaço, muitos dos quais foram úteis na geometria e na física matemática. Riemann publicou este artigo sem qualquer técnica analítica, o que tornou as suas ideias difíceis de seguir. Mais tarde, algumas das fórmulas apareceram num ensaio sobre a distribuição de calor num sólido, com que Riemann concorreu a um prémio da Academia Francesa (1861). Encontramos aqui um esboço da teoria das transformações de formas quadráticas.

O último artigo de Riemann que deve ser mencionado é a sua discussão do número $F(x)$ de primos menores que um dado número x (1859). Era uma aplicação da teoria dos números complexos à distribuição de primos e analisava a sugestão de Gauss de que $F(x)$ aproximava o integral logarítmico $\int_{2}^{x} (\log t)^{-1}\, dt$. Este artigo é famoso porque contém a chamada hipótese de Riemann de que a função zeta de Euler $\zeta(s)$ —a notação é de Riemann—, se for considerada para os complexos $s = x + iy$, tem todos os zeros não reais sobre a recta $x = \frac{1}{2}$. Esta conjectura nunca foi demonstrada nem refutada[150].

14

O conceito de Riemann de função de uma variável complexa tem sido muitas vezes comparado ao de Weierstrass. Karl Weierstrass foi durante muitos anos um professor nos ginásios

[150] R. Courant, «Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre», in *Naturwissenschaften*, vol. 14, 1926, pp. 813-818; E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford, 1951; H. H. Edwards, *Riemann's Zeta-Function*, Nova Iorque, 1974.

prussianos (os liceus do mundo latino) e em 1856 tornou-se professor de matemática na Universidade de Berlim, onde ensinou durante trinta anos. As suas lições, sempre meticulosamente preparadas, gozaram de uma fama crescente; foi principalmente através destas lições que as ideias de Weierstrass se tornaram propriedade comum dos matemáticos.

No período em que Weierstrass ensinou nos ginásios escreveu vários artigos sobre integrais hiperelípticos, funções abelianas e equações diferenciais algébricas. A sua contribuição mais conhecida é a fundamentação da teoria das funções complexas por meio de séries de potências. Num determinado sentido, era um retorno a Lagrange, com a diferença de que Weierstrass trabalhou no plano complexo e com perfeito rigor. Os valores de uma série de potências no seu círculo de convergência representavam um «elemento de função», o qual era então prolongado, se possível, pela chamada «continuação analítica». Weierstrass estudou especialmente funções inteiras, definidas por produtos infinitos. A sua função elíptica $\wp(u)$ ficou tão bem adquirida como as antigas funções elípticas (*sn u, cn u, dn u*) de Jacobi.

A fama de Weierstrass baseou-se no seu raciocínio extremamente cuidadoso, no «rigor weierstrassiano», que é visível não apenas na sua teoria das funções, mas também no seu cálculo das variações. Clarificou as noções de mínimo de uma função e de derivada e, com isto, eliminou o que estava vago nos conceitos fundamentais do cálculo. Ele era a consciência matemática por excelência, metodológica e lógica. Outro exemplo do seu raciocínio meticuloso foi a descoberta da convergência uniforme. Com Weierstrass começou a redução dos princípios da análise aos conceitos aritméticos mais simples, o que nós chamamos hoje aritmetização da matemática.

> É essencialmente um mérito da actividade científica de Weierstrass o acordo total e a certeza existente, actualmente em análise, relativamente ao desenvolvimento de tipos de raciocínio que se baseiam no conceito de número irracional e no de limite em geral. Devemos-lhe o facto de existir unanimidade em todos os resultados nas questões mais complicadas relativamente à teo-

ria das equações diferenciais e integrais, apesar das combinações mais audaciosas e diversificadas com a aplicação de sobre, justa e transposição de limites[151].

15

Esta aritmetização foi típica da chamada escola de Berlim e especialmente de Leopold Kronecker. A esta escola pertenceram matemáticos eminentes, especialistas em álgebra e na teoria dos números algébricos, tais como Kronecker, Kummer e Frobenius. A estes homens podemos associar Dedekind e Cantor. Ernst Kummer foi chamado a Berlim em 1855 para suceder a Dirichlet; ensinou aí até 1883, quando voluntariamente parou de fazer trabalhos matemáticos, porque sentia os primeiros sintomas do declínio da sua produtividade. Kummer, posteriormente, desenvolveu a geometria diferencial das congruências, que Hamilton tinha esboçado, e no curso dos seus estudos descobriu a superfície quártica com dezasseis pontos nodais que leva o seu nome. A sua reputação é baseada sobretudo na introdução de números «ideais» na teoria dos domínios algébricos de racionalidade (1846). Esta teoria foi inspirada em parte pelas tentativas de Kummer para provar o grande teorema de Fermat e em parte pela teoria dos resíduos biquadráticos de Gauss, na qual o conceito de factores primos tinha sido introduzido no domínio dos números complexos. Os factores «ideais» de Kummer permitiram a unicidade de decomposição em factores primos num domínio geral de racionalidade. Esta descoberta possibilitou grandes avanços na aritmética dos números algébricos, que foram mais tarde magistralmente resumidos no relatório de David Hilbert escrito para a Sociedade Matemática Alemã em 1894[152]. A teoria de Dedekind e Weber, que estabelecia a rela-

---

[151] D. Hilbert, «Über das Unendliche», in *Mathematische Annalen*, vol. 95 (1926), pp. 161-190; trad. francesa, *Acta Mathematica*, vol. 48, 1926, pp. 91-122.

[152] Id., «Die Theorie der algebraischen Zahlkörper», in *Jahresber. Deut. Math. Verein.*, 4, 1894-95, pp. 175-546.

ção entre a teoria das funções algébricas e a teoria dos números algébricos num determinado domínio de racionalidade (1882), foi um exemplo da influência da teoria de Kummer no processo de aritmetização das matemáticas.

Leopold Kronecker, pessoa de meios, fixou-se em Berlim em 1855, onde ensinou durante muitos anos na Universidade sem que formalmente fosse detentor de uma cátedra, aceitando apenas uma depois da reforma de Kummer, em 1883. As principais contribuições foram na teoria das funções elípticas, na teoria dos ideais e na aritmética das formas quadráticas. As suas lições publicadas sobre a teoria dos números são exposições cuidadosas de descobertas suas anteriores e mostram claramente a sua crença na necessidade de aritmetizar as matemáticas. Esta crença baseava-se na procura de rigor; as matemáticas, pensava ele, deviam basear-se no número e todo o número no número natural. O número π, por exemplo, mais que derivado através da forma geométrica usual, devia basear-se na série $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ e, deste modo, numa combinação de números inteiros; certas fracções contínuas para π podiam também servir o mesmo propósito. A tentativa de Kronecker de modelar toda a matemática segundo a teoria dos números é ilustrada através da afirmação bem conhecida proferida num encontro em Berlim em 1886: «*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*»[153] Aceitou a definição de uma entidade matemática apenas no caso em que possa ser entendida num número finito de passos. Deste modo, ultrapassou a dificuldade do infinito actual, recusando aceitá-lo. A divisa de Platão segundo a qual Deus «geometriza» sempre foi substituída, na escola de Kronecker, pela divisa de que Deus «aritmetiza» sempre.

Os ensinamentos de Kronecker sobre o infinito actual estavam em contraste flagrante com as teorias de Dedekind e especialmente de Cantor. Richard Dedekind, durante trinta e um anos professor na Technishe Hochschule de Brunswick, cons-

---

[153] «Deus fez os números inteiros e os homens fizeram o resto.»

truiu uma teoria rigorosa dos irracionais. Em dois livros pequenos, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) e *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888)[154], realizou na matemática moderna aquilo que Eudoxo tinha feito na matemática grega. Há uma grande semelhança entre «os cortes de Dedekind» com os quais a matemática moderna (excepto a escola de Kronecker) define os números irracionais e a antiga teoria de Eudoxo tal como é apresentada no quinto livro dos *Elementos*, de Euclides. Cantor e Weierstrass deram definições aritméticas de números irracionais um tanto diferentes da teoria de Dedekind, mas baseadas em considerações semelhantes.

O maior herege aos olhos de Kronecker, porém, foi Georg Cantor. Cantor, que ensinou em Halle, de 1869 até 1905, é conhecido não só pela sua teoria dos números irracionais, mas também pela sua teoria dos conjuntos *(Mengenlehre)*. Com essa teoria, Cantor criou um campo inteiramente novo da pesquisa matemática, que era capaz de satisfazer as exigências mais subtis do rigor, uma vez que as suas premissas fossem aceites. As publicações de Cantor começaram em 1870 e continuaram durante muitos anos; em 1883 publicou *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Nestes artigos, Cantor desenvolveu uma teoria dos números cardinais transfinitos baseada num tratamento matemático sistemático do infinito actual. Atribuiu o menor cardinal transfinito $\aleph$ ao conjunto numerável, dando ao contínuo um número transfinito mais elevado, e, deste modo, tornou-se possível criar uma aritmética dos números transfinitos análoga à aritmética ordinária. Cantor também definiu números ordinais transfinitos, expressando a maneira pela qual os conjuntos infinitos estão ordenados.

Estas descobertas de Cantor eram uma continuação das antigas especulações escolásticas sobre a natureza do infinito e Can-

---

[154] Traduzidos por *Continuity and Irrational Numbers* e *The Nature and Meaning of Numbers* por W. W. Beman, Chicago, 1901; reeditados juntos em *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Inc., 1963.



GEORG CANTOR (1845-1918)

tor estava bem ao corrente delas. Defendeu a total aceitação feita por Santo Agostinho do infinito actual, mas teve de se defender da oposição de muitos matemáticos que se recusavam a aceitar o infinito, excepto como um processo expresso por ∞. O principal opositor de Cantor era Kronecker, que representava uma tendência totalmente oposta no mesmo processo de aritmetização das matemáticas. Cantor ganhou finalmente larga aceitação quando a enorme importância da sua teoria para a fundamentação da teoria das funções reais e da topologia se tornou cada vez mais óbvia — isto especialmente depois de Lebesgue, em 1901, ter enriquecido a teoria dos conjuntos com a sua teoria da medida. Continuou a haver dificuldades lógicas na teo-

ria dos números transfinitos e apareceram paradoxos, tais como os de Burali Forte e Russell. Isto mais uma vez conduziu a diferentes escolas de pensamento sobre os fundamentos da matemática. A controvérsia do século XX entre formalistas e intuicionistas era uma continuação a um novo nível da controvérsia entre Cantor e Kronecker.

16

Contemporâneo deste notável desenvolvimento da álgebra e da análise, foi igualmente notável o florescimento da geometria.

Ele remonta aos ensinamentos de Monge, nos quais encontramos as raízes do método «sintético» e «algébrico» em geometria. Nos trabalhos dos discípulos de Monge, ambos os métodos aparecem separados; o método «sintético» originou a geometria projectiva e o método «algébrico» a moderna geometria analítica e a geometria algébrica. A geometria projectiva, como ciência separada, começou com o livro de Poncelet, de 1822. Existiram dificuldades na prioridade da descoberta, como aconteceu noutros casos, pois Poncelet teve de enfrentar a rivalidade de Joseph Gergonne, professor em Montpellier. Gergonne publicou vários artigos importantes sobre geometria projectiva, nos quais detectou o significado da dualidade na geometria, em simultâneo com Poncelet. Estes artigos apareceram nos *Annales de mathématiques pures et appliquées*, o primeiro jornal puramente matemático. Gergonne era o seu editor; publicou-se de 1810 a 1831. (Em 1836 recomeçou a sua publicação sob o nome de *Journal de mathématiques pures et appliquées.*)

Era característico do modo de pensar de Poncelet um outro princípio —o da continuidade— que lhe permitiu deduzir as propriedades de uma figura das de outras. Ele exprimiu o princípio da seguinte maneira:

> Considere-se uma figura arbitrária numa posição geral e, sob certos aspectos, indeterminada entre todas as posições que ela pode tomar sem violar as leis, as condições e as relações existentes entre as diferentes partes do sis-

tema. Suponhamos que uma ou mais relações ou propriedades — métricas, descritivas — se encontraram de acordo com estes dados. [...] Não é evidente que, quando, conservando estes mesmos dados, sujeitamos certas partes da figura original a um movimento contínuo, as propriedades e relações que se encontraram no primeiro sistema se manterão nos estados sucessivos desse sistema, se forem apenas tomadas em conta modificações particulares [...], por exemplo, certas quantidades podem ter desaparecido ou mudado o seu sentido ou sinal...[155]

Era um princípio que tinha de ser utilizado com grande cuidado, pois a formulação estava longe de ser precisa. Foi só com a álgebra moderna que se definiu o seu alcance de maneira mais precisa. Nas mãos de Poncelet e da sua escola, este princípio conduziu a resultados interessantes, novos e precisos, especialmente quando era aplicado a transformações do campo real para o campo imaginário. Isto possibilitou que Poncelet afirmasse que todos os círculos no plano tinham, «idealmente, dois pontos imaginários no infinito em comum», levando também à chamada «recta do infinito» no plano. G. H. Hardy notou que este facto significava que a geometria projectiva aceitava o infinito actual sem qualquer escrúpulo[156]. Os analistas iam permanecer divididos sobre este assunto.

As ideias de Poncelet foram posteriormente desenvolvidas por geómetras alemães. Em 1826 apareceu a primeira das publicações de Steiner, em 1827 o *Barycentrischer Calcül*, de Möbius, em 1828 o primeiro volume de *Analytisch-geometrische Entwickelungen*, de Plücker. Em 1831 apareceu o segundo volume, seguido, em 1832, por *Systematische Entwickelung*, de Steiner. O último dos grandes trabalhos pioneiros alemães, neste tipo de geometria, apareceu em 1847 com a publicação da axiomática de Von Staudt, *Geometrie der Lage*.

Ambos os pontos de vista, sintético e algébrico, em geometria estavam representados por estes geómetras alemães. O repre-

---

[155] Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1882, p. XIII.

[156] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, 6.ª ed., Cambridge, 1933, apêndice IV.

sentante característico da escola sintética (ou «pura») foi Jakob Steiner, filho de um autodidacta e lavrador suíço, um *Hirtenknabe*, que se apaixonou pela geometria através do conhecimento das ideias de Pestalozzi. Decidiu estudar em Heidelberga e mais tarde ensinou em Berlim, onde de 1834 até à sua morte, em 1863, deteve uma cátedra na Universidade. Steiner foi um geómetra completo; detestava o uso da álgebra e da análise de uma tal forma que chegou a ter aversão aos números. A geometria, na sua opinião, podia ser melhor aprendida pela concentração mental. Calculando, dizia Steiner, substitui-se, enquanto a geometria estimula, pensando-se. Era verdade certamente para o próprio Steiner, cujos métodos enriqueceram a geometria com um grande número de belos e muitas vezes intrincados teoremas. Devemos-lhe a descoberta da superfície de Steiner com uma dupla infinidade de cónicas sobre ela (também chamada «superfície romana»). Muitas vezes omitiu a prova dos seus teoremas, o que fez que os seus trabalhos reunidos constituíssem um tesouro para os geómetras que procuravam problemas para resolver.

Steiner construiu a sua geometria projectiva de uma maneira estritamente sistemática, passando das perspectividades às projectividades e destas às secções cónicas. Também resolveu um certo número de problemas isoperimétricos na sua típica maneira geométrica. Na sua demonstração (1836) de que a circunferência é, entre as curvas fechadas de um dado perímetro, a que limita maior área utilizou um processo pelo qual cada figura de um dado perímetro, que não seja um círculo, pode ser transformada noutra com o mesmo perímetro e uma área maior. A conclusão de Steiner de que o círculo, por isso, representava o máximo sofria de uma omissão: ela não provou a existência de um máximo. Dirichlet tentou chamar a atenção de Steiner para esse facto; uma prova rigorosa foi dada mais tarde por Weierstrass[157].

[157] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916, pp. 1-42.

Steiner precisava ainda de uma métrica para definir a razão dupla de quatro pontos ou quatro rectas. Esta insuficiência da teoria foi eliminada por Christian von Staudt, durante muitos anos professor na Universidade de Erlangen. Von Staudt, na sua *Geometrie der Lage*, definiu o *Wurf* de quatro pontos sobre uma recta de uma forma puramente projectiva, demonstrando então a sua identidade com a razão dupla. Com este propósito, usou a construção das chamadas «redes de Möbius», que conduzem a considerações axiomáticas estreitamente ligadas com os trabalhos de Dedekind, quando sejam introduzidos valores irracionais para as coordenadas projectivas. Em 1857, von Staudt demonstrou como os elementos imaginários podem ser rigorosamente introduzidos na geometria como elementos duplos de involuções elípticas.

Durante as décadas seguintes, a geometria sintética aumentou muito o seu conteúdo com as fundamentações de Poncelet, Steiner e von Staudt. Tinha-se constituído o assunto de vários livros de texto, dos quais a *Geometrie der Lage* (1868; 3.ª ed., 1886-92)[158], de Reye, é um dos exemplos mais conhecidos.

17

Foram importantes na geometria algébrica Möbius e Plücker na Alemanha, Chasles em França e Cayley em Inglaterra. August Ferdinand Möbius foi, durante mais de cinquenta anos, observador e, mais tarde, director do Observatório Astronómico de Leipzig e foi cientista em muitos domínios. No seu livro *Der barycentrischer Calcül* (1827) foi o primeiro a introduzir coordenadas homogéneas. Quando as massas m_1, m_2, m_3 eram colocadas nos vértices de um triângulo fixo, Möbius dava ao centro de gravidade *(baricentro)* destas massas as coordenadas $m_1:m_2:m_3$ e mostrava como estas coordenadas são próprias

[158] Traduzido como *Lectures on the Geometry of Position*, Nova Iorque, 1898.

para descrever as propriedades projectivas e afins do plano. As coordenadas homogéneas, a partir desta altura, tornaram-se um instrumento para o tratamento algébrico da geometria projectiva. Trabalhando num calmo isolamento, um pouco como o seu contemporâneo von Staudt, Möbius fez muitas outras descobertas interessantes. Um exemplo é o sistema nulo na teoria das congruências de rectas, que ele introduziu no seu livro sobre estática (1837). A «banda de Möbius» (publicada em 1865), um primeiro exemplo de uma superfície não orientável, recorda-nos que Möbius é também um dos fundadores da moderna ciência da topologia[159].

Julius Plücker, que ensinou durante muitos anos em Bona, foi um físico experimental e um geómetra. Fez uma série de descobertas sobre o magnetismo dos cristais, a condução eléctrica dos gases e a espectroscopia. Em vários artigos e livros, especialmente em *Neue Geometrie des Raumes* (1868-69), reconstruiu a geometria analítica aplicando grande profusão de ideias novas. Plücker mostrou o poder da notação abreviada, na qual, por exemplo, $C_1 + \lambda C_2 = 0$ representa um feixe de cónicas. Neste livro introduziu coordenadas homogéneas, conhecidas como coordenadas «projectivas», baseadas num tetraedro fundamental, e também sustentou o princípio fundamental de que a geometria não necessita de assentar no conceito de ponto como elemento básico. Rectas, planos, círculos, esferas podem todos ser usados como elementos *(Raumelemente)* sobre os quais a geometria se pode basear. Esta concepção fértil deu novas luzes a ambas as geometrias, a sintética e a algébrica, e deu lugar a novas formas de dualidade. O número de dimensões de uma forma particular de geometria poderia agora ser um número inteiro positivo arbitrário, dependendo do número de parâmetros necessários para definir um «elemento». Plücker também publicou uma teoria geral das curvas algébricas no plano, na

---

[159] A «banda de Möbius» foi também descoberta por J. B. Listing em Gotinga e publicada por Listing em 1861. Tanto Möbius como Listing descobriram-na em 1858.

qual derivou as «relações de Plücker» entre o número de singularidades (1834, 1839).

Michel Chasles, durante muitos anos o principal representante da geometria em França, foi aluno da Ecole Polytechnique nos últimos dias de Monge e em 1841 tornou-se professor nesta instituição. Em 1846 aceitou a cátedra de geometria superior, especialmente criada para ele, na Sorbonne, onde ensinou durante muitos anos. Os trabalhos de Chasles tinham muito em comum com os de Plücker, sobretudo na sua capacidade de obter o máximo de informação algébrica das suas equações. Isto conduziu-o a operações subtis com rectas isotrópicas e pontos circulares no infinito. Chasles seguiu Poncelet no uso de métodos «enumerativos», que nas suas mãos se desenvolveram num novo ramo da geometria, a chamada «geometria enumerativa». Este campo foi, mais tarde, amplamente explorado por Hermann Schubert, no seu *Kalkül der abzählenden Geometrie* (1879), e por H. G. Zeuthen em *Abzählenden Methoden* (1914). Ambos os livros revelam a força, assim como a fraqueza, deste tipo de álgebra numa linguagem geométrica. O seu sucesso inicial provocou uma reacção conduzida por E. Study, que sublinhou que «a precisão em *geometricis* não pode ser perpetuamente tratada de forma incidental»[160].

Chasles tinha uma fina apreciação da história das matemáticas, especialmente da geometria. O seu bem conhecido *Aperçu historique sur l'origine et le développemment des méthodes en géométrie* (1837) é um marco no início da história moderna das matemáticas e um bom exemplo de uma história da matemática escrita por um cientista produtivo[161].

---

[160] Ver E. Study, *Verhandlungen Dritter Intern. Math Kongress*, Heidelberga, 1905, pp. 388-395; B. L. van der Waerden, Diss., Leida, 1926.

[161] Chasles também adquiriu alguma notoriedade como vítima da um falsificador de documentos que entre 1861 e 1870 conseguiu vender-lhe milhares de artigos falsos, desde cartas escritas por Pascal até outras escritas por Platão (e mesmo uma de Maria Madalena para Lázaro). Ver J. A. Farrer, *Literary Forgeries*, Londres, 1907, cap. XII.

18

Durante estes anos de produtividade quase febril nas novas geometrias, algébrica e projectiva, outros tipos novos e ainda mais revolucionários de geometria conservaram-se escondidos em algumas publicações obscuras, postas de parte pelos matemáticos mais importantes. A questão de saber se o postulado das paralelas de Euclides é um axioma independente ou pode ser derivado de outros axiomas tinha confundido os matemáticos durante 2000 anos. Ptolomeu tentara encontrar uma resposta na antiguidade, Nasīr al-dīn na Idade Média e Lambert e Legendre no século XVIII. Todos estes homens tinham tentado provar o axioma e haviam falhado, embora tivessem encontrado alguns resultados interessantes no decurso das suas investigações[162]. Gauss foi o primeiro homem a acreditar na independência do postulado das paralelas, o que implicava que outras geometrias, baseadas numa outra escolha de axiomas, fossem logicamente possíveis. Gauss nunca publicou os seus pensamentos sobre este assunto. O primeiro a desafiar abertamente a autoridade de dois milénios e a construir uma geometria não euclidiana foi um russo, Nikolai Ivanovič Lobačevskiĭ, e um húngaro, János Bolyai. O primeiro a publicar a sua ideia foi Lobačevskiĭ, que era professor em Kazan e em 1826 deu lições sobre o axioma das paralelas de Euclides. O seu primeiro livro apareceu em 1829-30 e foi escrito em russo. Poucas pessoas tiveram conhecimento dele. Mesmo uma edição alemã posterior, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*[163],

---

[162] É um facto curioso que, desconhecido no seu tempo, o filósofo escocês Thomas Reid, na sua crítica da teoria da visão de Berkeley, tenha publicado um resumo de uma geometria não euclidiana (do tipo elíptico), ilustrada por raios de luz: *An Inquiry into the Human Mind* (1764). Ver N. Daniels, «Thomas Reid's Discovery of Non-Euclidean Geometry», in *Philosophy of Science*, vol. 39, 1972, pp. 219-234.

[163] Traduzido como *Geometrical Researches on the Theory of Parallels* por G. B. Halsted e reeditado em R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, 1912, Dover Publications, Inc., 1955.



JAKOB STEINER (1796-1863)



ARTHUR CAYLEY (1821-1895)



NICOLAI IVANOVIČ LOBAČEVSKIĬ (1793-1856)

recebeu pouca atenção, embora Gauss tivesse mostrado interesse. Nesta altura, Bolyai já tinha publicado a suas ideias sobre o assunto.

János (Johann) Bolyai era filho de um professor de matemática duma cidade de província da Hungria. Este professor, Farkas (Wolfgang) Bolyai, tinha estudado em Gotinga ao mesmo tempo que Gauss. Ambos mantiveram uma correspondência ocasional. Farkas passou muito tempo tentando provar o quinto postulado de Euclides (ver cap. III, secção 7, atrás), mas não chegou a qualquer conclusão. O seu filho herdou esta paixão

e também começou a trabalhar numa prova, apesar dos apelos do seu pai para fazer outra coisa:

> Devias detestar tanto isso como as coisas perversas, que te podem privar de todo o lazer, da tua saúde, do teu descanso e de toda a alegria da tua vida. Esta escuridão insondável podia talvez destruir um milhar de poderosos Newtons, sem nunca haver luz na Terra [...] [Carta de 1820.]

János Bolyai entrou no Exército e adquiriu a reputação de um oficial arrojado. Começou a aceitar o postulado de Euclides como um axioma indepedente e descobriu que era possível construir uma geometria, baseada noutro axioma, na qual, através de um ponto do plano, se pudesse traçar uma infinidade de rectas que não intersectassem uma linha nesse plano. Era a mesma ideia que já ocorrera a Gauss e a Lobačevskiĭ. Bolyai escreveu as suas reflexões, que foram publicadas em 1832, como apêndice a um livro do pai, com o título *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*[164]. O pai, preocupado, escreveu a Gauss para se aconselhar acerca dos pontos de vista não ortodoxos do filho. Quando a resposta de Gotinga chegou continha a aprovação entusiástica do trabalho do jovem Bolyai. Além disso, porém, Gauss observou que não podia aplaudi-lo, pois isso significaria um elogio próprio, já que as ideias do *Appendix* tinham sido as suas próprias durante muitos anos.

O jovem János ficou profundamente desapontado com esta carta de aprovação que o elevava à dignidade de grande cientista, mas que lhe roubava a prioridade. O desapontamento aumentou em razão do pouco reconhecimento posterior, embora ele continuasse a escrever sobre matemática, por exemplo sobre uma representação geométrica dos imaginários. Ficou ainda mais irritado quando tomou conhecimento do livro de Lobačevskiĭ através de uma tradução alemã de 1840; continuou uma vida retirada até morrer, em 1860.

---

[164] Traduzido como *The Science of Absolute Space* por G. B. Halsted e reeditado em Bonola.

As teorias de Bolyai e Lobačevskiĭ eram semelhantes em princípio, embora os seus artigos fossem muito diferentes. É notável como as novas ideias surgiram independentemente em Gotinga, Budapeste e Kazan, e no mesmo período, depois de uma fase de incubação de 2000 anos. Também é de notar como amadureceram, em parte, fora da periferia geográfica do mundo da pesquisa matemática. Algumas vezes, grandes ideias novas nasceram fora, e não dentro das escolas. Existiu porém um elo em tudo isto: Gauss, em Gotinga, era colega de estudo do velho Bolyai e o professor de Lobačevskiĭ em Kazan fora J. M. Bartels, que tinha sido um dos professores de Gauss.

A geometria não euclidiana (o nome é devido a Gauss) permaneceu durante várias décadas um campo obscuro da matemática. A maior parte dos matemáticos ignoraram-na, a filosofia kantiana, predominante, recusava tomá-la a sério. O primeiro grande cientista a compreender plenamente a sua importância foi Riemann, cuja teoria geral das variedades (1854) legitimava de maneira clara não só os tipos existentes de geometria não euclidiana, como também muitas outras, chamadas geometrias riemannianas. Porém, a aceitação total destas teorias só chegou quando a geração posterior a Riemann começou a entender o seu significado (1870 e mais tarde).

Existiu ainda outra generalização da geometria clássica, originada nos anos anteriores a Riemann e que não encontrou uma apreciação completa senão depois da sua morte. Era a geometria de mais de três dimensões. Foi divulgada e completamente desenvolvida em *Ausdehnungslehre (Teoria da Extensão)*, de Grassmann, de 1844. Hermann Grassmann era professor no liceu (ginásio) em Stettin e foi um homem de extraordinária versatilidade; escreveu sobre assuntos tão variados como correntes eléctricas, cores, acústica, linguística, botânica e folclore. O seu dicionário de sânscrito sobre o *Rigveda* ainda se utiliza. A *Ausdehnungslehre*, da qual foi publicada em 1861 uma edição corrigida, foi escrita de uma forma estritamente euclidiana. Construiu uma geometria num espaço de *n* dimensões, primeiro afim

e depois métrico. Gassmann utilizou um simbolismo invariante, no qual reconhecemos agora uma notação vectorial e tensorial (os seus produtos «abertos» são tensores), mas que tornou o seu trabalho praticamente inacessível aos seus contemporâneos. Uma geração posterior usou a estrutura de Grassmann para construir a análise vectorial para espaços afins e métricos.

Embora Cayley, em 1843, introduzisse o mesmo conceito de espaço de *n* dimensões duma forma muito mais acessível, a geometria de mais de três dimensões foi recebida com desconfiança e incredulidade. Mais uma vez, as palavras de Riemann de 1854 tornaram mais fácil uma plena apreciação. Estavam associadas às ideias de Riemann as de Plücker, que salientou que os elementos do espaço não precisam de ser pontos (1865), de forma que a geometria das rectas num espaço a três dimensões podia ser considerada geometria a quatro dimensões, ou, como Klein realçou, a geometria de uma quádrica a quatro dimensões num espaço de dimensão cinco. A total aceitação das geometrias com mais de três dimensões ocorreu só na última parte do século XIX, principalmente devido ao seu uso na interpretação da teoria das formas algébricas e diferenciais com mais de três variáveis.

19

Os nomes de Hamilton e Cayley revelam que, por volta de 1840, os matemáticos de língua inglesa tinham, por fim, começado a alcançar os seus colegas do continente. Até, pelo menos, bem entrado o século XIX, os ilustres professores de Cambridge e Oxford olhavam para as tentivas de aperfeiçoamento da teoria das fluxões como uma revolta ímpia contra a memória sagrada de Newton. O resultado foi a escola newtoniana de Inglaterra e a escola leibniziana do continente se terem separado de tal forma que Euler, no seu cálculo integral (1768), considerava inútil a união de ambos os métodos de expressão. O dilema foi resolvido em 1812, em Cambridge, por um grupo de matemáticos jovens, que, sob a inspiração do velho Robert Woodhouse,

formaram uma Sociedade Analítica para propagar a notação diferencial. Os principais eram George Peacock, Charles Babbage e John Herschel. Tentaram, nas palavras de Babbage, defender «os princípios do *d*-ismo puro como oposição à época do *pontinho*[165] na Universidade»[166]. A este movimento depararam-se inicialmente críticas severas, que foram derrotadas por acções tal como a publicação, em 1816, de uma tradução inglesa do *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, de Lacroix (2.ª ed., 1806). A nova geração, em Inglaterra, começava agora a participar nas matemáticas modernas.

A primeira contribuição importante não veio do grupo de Cambridge, mas de alguns matemáticos que tinham adoptado independentemente as matemáticas continentais. Os mais importantes destes matemáticos foram Hamilton e George Green. É interessante notar que com ambos, assim como com Nathaniel Bowditch, na Nova Inglaterra, a inspiração para estudar o «*d*-ismo puro» veio do estudo da *Mécanique céleste*, de Laplace. Green, autodidacta, filho de um moleiro de Nottingham, seguiu com muito cuidado as novas descobertas na electricidade. Naquele tempo (cerca de 1825) quase não existia, praticamente, nenhuma teoria matemática para explicar fenómenos eléctricos. Poisson, em 1812, não tinha feito mais do que começar. Green leu Laplace e, nas suas próprias palavras:

> Considerando quanto desejável era que um poderoso agente universal, como a electricidade, pudesse, tanto quanto possível, ser submetido ao cálculo, e reflectindo sobre as vantagens que surgem na solução de muitos problemas difíceis, descartando inteiramente um exame particular de cada uma das forças que actuam sobre os vários corpos em qualquer sistema e confinando a atenção apenas sobre uma função peculiar de cujos diferenciais as forças dependem, fui induzido a tentar saber se seria possível descobrir relações gerais existentes entre aquela função e as quantidades de electricidade nos corpos que a produzem.

---

[165] O autor refere-se à notação para as derivadas $\dot{x}$, $\ddot{x}$, etc. *(N. do T.)*

[166] Ver J. D. Dubbey, «The Introduction of the Differential Notation in Great Britain», in *Annals of Science*, vol. 19, 1963, pp. 37-48.

O resultado foi o *Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism* (1828), de Green, a primeira tentativa na teoria matemática do electromagnetismo. Era o princípio da física matemática moderna em Inglaterra e, com o artigo de Gauss de 1839, estabeleceu-se a teoria do potencial como um ramo independente da matemática. Gauss ignorava o artigo de Green, que só se tornou mais conhecido quando William Thompson (mais tarde Lorde Kelvin) o reeditou no *Journal de Crelle*, em 1846. A afinidade entre Gauss e Green era tão grande que, quando Green seleccionava o termo «função potencial», Gauss seleccionava quase o mesmo termo, «potencial», para a solução da equação de Laplace. Duas identidades relacionadas intimamente, ligando integrais de linha e de superfície, são chamadas «fórmula de Green» e «fórmula de Gauss». O termo «função de Green» para a solução de equações diferenciais parciais também honra o filho do moleiro que estudava Laplace nos seus tempos livres.

Não temos espaço para um esboço do desenvolvimento posterior da física matemática em Inglaterra ou na Alemanha. Com este desenvolvimento estão relacionados os nomes de Stokes, Rayleigh, Kelvin e Maxwell, de Kirchhoff e Helmholtz, de Gibbs e de muitos outros. Estes homens contribuíram tanto para a solução de equações diferenciais às derivadas parciais que a física matemática e a teoria das equações diferenciais às derivadas parciais lineares de segunda ordem algumas vezes pareciam identificadas. A física matemática, porém, levou ideias férteis a outros campos da matemática, às probabilidades e à teoria das funções complexas, assim como à geometria. De particular importância foi o *Treatise on Electricity and Magnetism*, de James Clerk Maxwell (2 vols., 1873)[167], que fez uma exposição matemática sistemática da teoria do electromagnetismo baseada nas experiências de Faraday. Esta teoria de Maxwell inspirou as teorias de Lorentz sobre o electrão e de Einstein sobre a relatividade.

[167] Reedição da Dover Publications, Inc., 1954.

A matemática pura do século XIX em Inglaterra foi em primeiro lugar a álgebra, com aplicações sobretudo à geometria e com três homens —Cayley, Sylvester e Salmon— dominando neste campo. Arthur Cayley dedicou os seus primeiros anos ao estudo e à prática da advocacia, mas em 1863 aceitou o cargo de professor (Sadlerian) de Matemática em Cambridge, onde ensinou durante trinta anos. Nos anos 40, Cayley, enquanto praticava a advocacia em Londres, encontrou Sylvester, que naquela altura era um actuário; data desses anos o interesse comum de Cayley e Sylvester pelas formas algébricas — ou *quânticas*, como lhes chamou Cayley. A sua colaboração significava o começo da teoria dos invariantes algébricos.

Esta teoria «andara no ar» durante muitos anos, especialmente depois de os determinantes começarem a ser objecto de estudo. Os primeiros trabalhos de Cayley e Sylvester ultrapassaram os meros determinantes; eram uma tentativa consciente de dar uma teoria sistemática de invariantes das formas algébricas, completada com o seu simbolismo próprio e regras de composição. Esta a teoria que mais tarde foi melhorada por Aronhold e Clebsch na Alemanha e que constituía a contrapartida algébrica da geometria projectiva de Poncelet. O volumoso trabalho de Cayley cobria uma grande variedade de assuntos no campo dos grupos finitos, curvas algébricas, determinantes e invariantes de formas algébricas. Entre os trabalhos mais conhecidos estão os nove artigos *Memoirs on Quantics* (1854-78). O sexto artigo desta série (1859) continha a definição projectiva de uma métrica em relação a uma secção cónica. Esta descoberta conduziu Cayley à definição projectiva da métrica euclidiana e, deste modo, possibilitou-lhe transferir para a geometria métrica a sua posição dentro da estrutura da geometria projectiva. A relação desta métrica projectiva com a geometria não euclidiana escapou a Cayley; foi mais tarde descoberta por Felix Klein.

James Joseph Sylvester não foi apenas um matemático, mas também um poeta, um talento e, juntamente com Leibniz, o maior criador de novos termos em toda a história da matemática. De 1855 a 1869 ensinou na Academia Militar de Woolwich. Esteve duas vezes na América, a primeira como professor na Universidade da Virgínia (1841-42), a segunda como professor na Universidade John Hopkins, em Baltimore (1877-83). Durante este segundo período foi dos primeiros a firmarem trabalho matemático avançado nas universidades americanas. Com o ensino de Sylvester, as matemáticas começaram a florescer nos Estados Unidos.

Duas das muitas contribuições de Sylvester em álgebra tornaram-se clássicas: a sua teoria dos divisores elementares (1851; redescoberta por Weierstrass em 1868) e a sua lei da inércia das formas quadráticas (1852; já conhecida por Jacobi e Riemann, mas não publicada). Também devemos a Sylvester muitos termos agora aceites na generalidade, tais como *invariante, covariante, contravariante, cogrediente* e *sizígio*. Muitas anedotas se contam sobre ele — em geral do género do professor distraído. O terceiro geómetra-algebrista inglês foi George Salmon, que durante a sua longa vida esteve ligado ao Trinity College, em Dublim, a *alma mater* de Hamilton, onde ensinou ao mesmo tempo matemáticas e religião. O seu principal mérito reside nos seus bem conhecidos textos, que se distinguem pela clareza e pela elegância. Estes livros abriram o caminho para a geometria analítica e a teoria dos invariantes a várias gerações de estudantes em muitos países, e mesmo agora têm sido dificilmente ultrapassados. São eles *Conic Sections* (1848), *Higher Plane Curves* (1852), *Modern Higher Algebra* (1859) e *Analytic Geometry of Three Dimensions* (1862). O estudo destes livros ainda pode ser altamente recomendado a todos os estudantes de Geometria.

21

Dois resultados da álgebra do Reino Unido merecem a nossa especial atenção: os quaterniões de Hamilton e os biquaterniões de Clifford. Hamilton, o astrónomo real da Irlanda, tendo com-



JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814-1897)



WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865)

pletado o seu trabalho sobre mecânica e óptica, voltou em 1835 à álgebra. A sua *Theory of Algebraic Couples* (1835) definiu a álgebra como a ciência do tempo puro e construiu uma álgebra rigorosa dos números complexos, concebendo um número complexo como um par de números. Esta teoria foi provavelmente independente da de Gauss, que na sua teoria dos resíduos biquadráticos (1831) tinha também construído uma álgebra rigorosa dos números complexos, mas baseada na geometria do plano complexo. Ambas as concepções são agora igualmente aceites. Hamilton, subsequentemente, tentou penetrar na álgebra dos triplos de números, quádruplos de números, etc. Uma luz desceu sobre ele — tal como os seus admiradores gostam de dizer — num certo dia de Outubro de 1843, quando, ao passar numa ponte de Dublim, descobriu o quaternião. As suas investigações sobre os quaterniões foram publicadas em dois enormes livros, as *Lectures on Quaternions* (1853) e o póstumo *Elements of Quaternions* (1866). A parte mais conhecida do cálculo dos quaterniões foi a teoria dos vectores (o nome é devido a Hamilton), que também era uma parte da teoria da extensão de Grassmann. É principalmente devido a isto que os trabalhos algébricos de Hamilton e Grassmann são agora frequentemente citados. Na época de Hamilton, porém, e muito tempo depois, os próprios quaterniões foram objecto de uma admiração exagerada. Alguns matemáticos britânicos viam no cálculo dos quaterniões uma espécie de *arithmetica universalis* de Leibniz, o que, como é natural, provocou uma reacção (Heaviside *versus* Tait), com a qual os quaterniões perderam muita da sua glória. A teoria dos números hipercomplexos, elaborada por Peirce, Study, Frobenius e Cartan, colocou praticamente os quaterniões no seu lugar legítimo, como o mais simples sistema numérico associativo com mais de duas unidades. O culto do quaternião, no apogeu dos seus dias, conduziu mesmo a uma Associação Internacional de Promoção dos Quaterniões e Sistemas Afins de Matemática, que desapareceu como vítima da primeira guerra mundial. Outro aspecto da controvérsia dos quaterniões foi a luta entre os segui-

dores de Hamilton e Grassmann, quando, apesar dos esforços de Gibbs na América e Heaviside na Inglaterra, a análise vectorial emergiu como um ramo independente das matemáticas. Esta controvérsia empolou-se entre 1890 e a primeira guerra mundial e foi finalmente resolvida pela aplicação da teoria dos grupos, que estabeleceu os méritos de cada método no seu próprio campo de operações[168].

William Kingdon Clifford, que morreu em 1879, com a idade de 33 anos, ensinou no Trinity College, em Cambridge, e no University College, em Londres. Foi um dos primeiros ingleses que entenderam Riemann e com ele partilhou um profundo interesse pela origem das nossas concepções de espaço. Clifford desenvolveu uma geometria do movimento, para o estudo do qual generalizou os quaterniões de Hamilton nos chamados biquaterniões (1873-76). Eram quaterniões com coeficientes tomados de um sistema de números complexos $a + b\epsilon$, onde ϵ^2 pode ser $+1$, -1 ou 0, e que podiam ser usados também no estudo do movimento em espaços não euclidianos. O livro de Clifford *Common Sense of the Exact Sciences* é ainda de boa leitura; revela a sua afinidade de pensamento com Felix Klein. Esta afinidade é também revelada na expressão «espaços de Clifford-Klein» para certas variedades euclidianas fechadas em geometria não euclidiana. Se Clifford tivesse vivido mais tempo, as ideias de Riemann poderiam ter influenciado os matemáticos ingleses uma geração antes.

Durante muitas décadas, a matemática pura, nos países de língua inglesa, manteve a sua forte ênfase na álgebra formal. Isto influenciou os trabalhos de Benjamim Peirce, da Universidade de Harvard, discípulo de Nathaniel Bowditch, que levou a cabo importantes trabalhos sobre mecânica celeste e em 1870

---

[168] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlim, 1927, vol. II, pp. 27-52; J. A. Schouten, *Grundlagers der Vektor- und Affinoranalysis*, Leipzig, 1914; ver ainda os vários artigos de E. Cartan.

publicou *Linear Associative Algebras*, um dos primeiros estudos sistemáticos dos números hipercomplexos[169]. A tendência formalista nos matemáticos ingleses teve importância para o aparecimento de *An Investigation of the Laws of Thought* (1854)[170], de George Boole, do Queen's College, em Dublim. Aqui mostrava-se como as leis da lógica formal, que tinham sido codificadas por Aristóteles e ensinadas durante séculos nas universidades, podiam, elas próprias, tornar-se um objecto do cálculo, o que estabeleceu princípios em harmonia com a ideia de Leibniz de uma *characteristica generalis*.

Boole foi influenciado pelos trabalhos de lógica simbólica realizados por Augustus de Morgan, de 1826 a 1866 professor no University College, em Londres, e que também apresentou a primeira forma de uma lógica das proposições. De Morgan, na sua longa carreira, influenciou muito as matemáticas britânicas. Foi também um sábio: ver a sua obra *Budget of Paradoxes* (1872), postumamente publicada. Esta «álgebra da lógica» iniciou uma escola de pensamento que aspirava a estabelecer a unificação da lógica e da matemática. Recebeu o seu ímpeto do livro de Gottlob Frege *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), o qual propôs uma dedução dos conceitos da aritmética a partir da lógica. Estas investigações atingiram o clímace no século XX com os *Principia Mathematica,* de Bertrand Russell e Alfred North Withehead (1910-13); também influenciaram o trabalho posterior de Hilbert sobre os fundamentos da aritmética e a eliminação dos paradoxos do infinito[171].

---

[169] Um dos filhos de Benjamin Peirce, Charles Sanders Peirce, não foi apenas um competente matemático aplicado, tal como seu pai (nos serviços geodésicos costeiros do EUA), mas deu contribuições importantes para a filosofia da matemática que só hoje são abertamente reconhecidas. Ver, por exemplo, C. Eiserle, *Studies in the Scientific and Mathematical Philosophy of C. S. Peirce* (Haia, 1979; uma compilação de ensaios).

[170] Reedição da Dover Publications, Inc., 1951.

[171] D. Hilbert e W. Ackermann, *Grunddzüge der theoretischen Logik,* Berlim, 1928. Ver também M. Black, *The Nature of Mathematics*, Nova Iorque e Londres, 1934.

Os artigos sobre a teoria dos invariantes de Cayley e Sylvester tiveram uma grande aceitação na Alemanha, onde vários matemáticos fizeram da teoria uma ciência baseada num algoritmo completo. As figuras principais foram Hesse, Aronhold, Clebsch e Gordan. Hesse, que foi professor em Königsberg e mais tarde em Heidelberga e Munique, demonstrou, tal como Plücker, o poder dos métodos abreviados na geometria analítica. Ele gostava de raciocinar com a ajuda de coordenadas homogéneas e determinantes. Aronhold, que ensinou na Technische Hochschule, em Berlim, escreveu em 1858 um artigo no qual desenvolveu um simbolismo consistente na teoria dos invariantes, com o auxílio dos chamados factores ideais (que não têm relação com os de Kummer); este simbolismo foi posteriormente desenvolvido por Clebsch, em 1861, e, através dele, o simbolismo de «Clebsch-Aronhold» tornou-se quase universalmente um método aceite para a investigação sistemática dos invariantes algébricos. Agora reconhecemos neste simbolismo, nos vectores de Hamilton, nos produtos abertos de Grassmann e nas díadas de Gibbs aspectos particulares da álgebra dos tensores e, portanto, da álgebra linear. Esta teoria dos invariantes foi mais tarde enriquecida por Paul Gordan, da Universidade de Erlangen, que provou (1868-69) que a toda a forma binária correspondia um sistema finito de invariantes racionais e covariantes, nos quais todos os outros invariantes racionais e covariantes podem ser expressos racionalmente. Este teorema de Gordan (o *Endlichkeitssatz*) foi aplicado por Hilbert, em 1890, às formas algébricas com *n* variáveis.

Alfred Clebsch foi professor em Karlsruhe, Giessen e Gotinga e morreu com 39 anos de idade. A sua vida foi uma condensação de realizações notáveis. Publicou um livro sobre elasticidade (1862), seguindo a orientação de Lamé e Saint-Venant, em França; aplicou a sua teoria dos invariantes à geometria projectiva. Foi um dos primeiros homens a compreender Riemann

e um dos fundadores do ramo da geometria algébrica no qual as teorias das funções e das superfícies multiplamente conexas de Riemann se aplicam a curvas algébricas reais. A *Theorie der Abelschen Funktionen* (1866), de Clebsch e Gordan, deu um amplo resumo destas ideias. Clebsch também fundou os *Mathematische Annalen,* que durante mais de sessenta anos foi o principal jornal de matemática. As suas lições sobre Geometria, publicadas pelo seu aluno F. Lindemann, continuam a ser um texto-modelo sobre geometria projectiva.

23

Cerca de 1870, as matemáticas tinham-se tornado uma estrutura enorme e complexa, dividida num grande número de campos, só conhecidos dos especialistas. Mesmo grandes matemáticos —Hermite, Weierstrass, Cayley, Beltrami— só podiam ser eficientes em poucos destes domínios. Esta especialização tem aumentado constantemente, tendo atingido actualmente proporções alarmantes. A reacção contra isto nunca parou e algumas das mais importantes realizações dos últimos cem anos têm sido o resultado duma síntese de diferentes domínios da matemática.

Tal síntese fora realizada no século XVIII pelos trabalhos de Lagrange e Laplace sobre mecânica. Continuaram a ser a base de muitos trabalhos importantes de carácter variado. O século XIX acrescentou a estes princípios novos princípios unificadores, especialmente com a teoria dos grupos e a concepção riemanniana de função e de espaço. O seu significado pode ser melhor entendido nos trabalhos de Klein, Lie e Poincaré.

Felix Klein foi assistente de Plücker em Bona durante os anos 60; foi aí que aprendeu geometria. Visitou Paris em 1870, quando tinha 22 anos de idade. Aí conheceu Sophus Lie, um norueguês seis anos mais velho que se tinha interessado pela matemática pouco tempo antes. Os jovens conheceram os matemáticos franceses, entre eles Camille Jordan, da École Polytechnique, e estudaram os seus trabalhos. Jordan, em 1870, tinha

acabado de escrever o *Traité des substitutions*, um livro sobre grupos de substituições e sobre a teoria das equações de Galois. Klein e Lie começaram a entender a importância central da teoria dos grupos e, a essa luz, dividiram o campo da matemática mais ou menos em duas partes. Klein, em geral, concentrou-se sobre grupos descontínuos e Lie sobre grupos contínuos.

Em 1872, Klein tornou-se professor em Erlangen. Na sua lição inaugural explicou a importância do conceito de grupo para a classificação dos diferentes campos da matemática. Na lição, que se tornou conhecida por «programa de Erlangen», defendeu que toda a geometria era a teoria dos invariantes de um grupo de transformações particulares. Estendendo ou limitando o grupo, podemos passar de um tipo de geometria a outro. A geometria euclidiana é o estudo dos invariantes do grupo métrico, a geometria projectiva é o estudo dos invariantes do grupo projectivo. A classificação dos grupos de transformações dá-nos a classificação das geometrias; a teoria dos invariantes algébricos e diferenciais de cada grupo dá-nos a estrutura analítica de uma geometria. A definição projectiva de Cayley de uma métrica permite considerar a geometria métrica dentro da geometria projectiva. A «adjunção» de um invariante quadrático[172] à geometria projectiva do plano conduz às geometrias não euclidianas. Mesmo a relativamente desconhecida topologia recebeu o seu lugar próprio, como sendo a teoria dos invariantes de transformações pontuais contínuas.

No ano anterior, Klein dera um exemplo importante do seu modo de pensar quando demonstrou como as geometrias não euclidianas podiam ser concebidas como geometrias projectivas com uma métrica de Cayley. Isto conduziu finalmente ao pleno reconhecimento das teorias desprezadas de Bolyai e Lobačevskiĭ. A sua consistência lógica era agora estabelecida. Se existiam erros lógicos na geometria não euclidiana, eles poderiam ser detectados na geometria projectiva, e poucos matemáticos esta-

---

[172] No texto original «invariant conic». *(N. do T.)*

riam dispostos a admitir uma tal heresia. Mais tarde, esta ideia de uma «imagem» de um campo das matemáticas noutro campo foi muitas vezes usada e desempenhou um papel importante na axiomática da geometria de Hilbert.

A teoria dos grupos tornou possível a síntese dos trabalhos geométricos e algébricos de Monge, Poncelet, Gauss, Cayley, Clebsch, Grassmann e Riemann. A teoria do espaço de Riemann, que tinha oferecido tantas sugestões, incluída no programa de Erlangen, inspirou não só Klein, mas também Helmholtz e Lie. Helmholtz (em 1868 e 1884) estudou a concepção de espaço de Riemann, por um lado, procurando uma imagem geométrica para a sua teoria das «cores» e, por outro lado, procurando saber a origem da nossa medição ocular. Estes estudos levaram-no a investigar a natureza dos axiomas da geometria e, especialmente, a métrica quadrática de Riemann. Lie melhorou as especulações de Helmholtz relacionadas com a natureza da medição de Riemann, analisando a natureza dos grupos de transformações subjacentes (1890). Este «problema do espaço de Lie-Helmholtz» foi importante não só para a relatividade e a teoria dos grupos, mas também para a fisiologia[173].

Klein fez uma exposição da concepção de Riemann das funções complexas no artigo *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen* (1882)[174], no qual ele sublinha como considerações físicas podem influenciar mesmo o mais subtil tipo de matemática. Em *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884)[175] demonstrou que a álgebra moderna podia ensinar muitas coisas novas e surpreendentes acerca dos antigos sólidos platónicos. Este trabalho era um estudo dos grupos de rotações dos sólidos regulares e da sua relação com grupos de Galois das equações albégricas. Em estudos extensos, seus e de muitos dis-

[173] H. Freudenthal, «Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtzschen Raumproblems», in *Math. Zeitschrift*, 63, 1956, pp. 374-405.

[174] Traduzido como *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals* por Frances Hardcastle.

[175] Traduzido como *Lectures on the Icosahedron* por G. G. Morrice.



FELIX KLEIN (1849-1925)



MARIUS SOPHUS LIE (1842-1899)

cípulos, Klein aplicou o conceito de grupo às equações diferenciais lineares, às funções modulares elípticas, às funções abelianas e às novas funções «automórficas», as últimas numa competição interessante e amigável com Poincaré. Sob a direcção inspiradora de Klein, Gotinga, com as tradições de Gauss, Dirichlet e Riemann, tornou-se um centro universal de investigação matemática, onde jovens, rapazes e raparigas, de muitos países se reuniam para estudar os assuntos do seu interesse como uma parte integrante de todas as matemáticas. Klein deu lições inspiradoras, cujas notas circularam de uma forma mimeografada e proporcionaram a gerações inteiras de matemáticos uma informação especializada e, acima de tudo, uma compreensão da unidade da sua ciência.

Enquanto esteve em Paris, Sophus Lie descobrira as transformações de contacto, e com isto a chave de toda a dinâmica hamiltoniana como parte da teoria dos grupos. Depois do seu regresso à Noruega tornou-se professor em Cristiânia; mais tarde, de 1886 a 1898, ensinou em Leipzig. Dedicou toda a sua vida ao estudo sistemático dos grupos contínuos de transformações e seus invariantes, demonstrando a sua importância central como princípio classificador em geometria, em mecânica e nas equações diferenciais, ordinárias e derivadas parciais. O resultado deste trabalho foi codificado num certo número de livros, editados com a ajuda dos discípulos de Lie, Scheffers e Engel (*Theorie der Transformationsgruppen,* 1888-93; *Differentialgleichungen*, 1891; *Kontinuierliche Gruppen*, 1893; *Berührungstransformation*, 1896). Os trabalhos de Lie foram mais tarde consideravelmente enriquecidos pelo e sob a influência do matemático francês Elie Cartan.

24

A França, perante o grande crescimento da matemática na Alemanha, continuava a produzir excelentes matemáticos em todos os campos. É interessante comparar os matemáticos ale-

mães com os franceses; Hermite com Weierstrass, Darboux com Klein, Hadamard com Hilbert, Paul Tannery com Moritz Cantor. Da década de 1840 à de 1860, o principal matemático foi Joseph Liouville, professor no Collège de France, em Paris, um bom professor, organizador e editor durante muitos anos do *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Investigou de uma forma sistemática a teoria aritmética das formas quadráticas de duas ou mais variáveis, mas o «teorema de Liouville» na mecânica estatística revela-o como um investigador produtivo num campo inteiramente diferente. Estabeleceu a existência de números transcendentes e em 1844 provou que nem e nem e^2 podem ser raízes de uma equação quadrática com coeficientes racionais. Isto era um passo na cadeia de argumentos que conduzia da prova de Lambert, de 1716, de que π é irracional à prova de Hermite de que e é transcendente (1873) e à prova final de F. Lindemann de que π é transcendente (1882). Liouville e muitos dos seus associados desenvolveram a geometria diferencial das curvas e superfícies; as fórmulas de Frenet-Serret (1847) provieram do grupo centrado em Liouville.

Charles Hermite, professor na Sorbonne e na École Polytechnique, tornou-se o principal representante da análise em França depois da morte de Cauchy, em 1857. Os trabalhos de Hermite, assim como os de Liouville, estavam na tradição de Gauss e de Jacobi; também mostravam afinidades com os de Riemann e Weierstrass. As funções elípticas, as funções modulares, as funções teta e a teoria dos números e a dos invariantes receberam a sua atenção, como testemunham os nomes «números de Hermite», «formas hermitianas». A sua amizade com o matemático holandês Stieltjes, que, com a intervenção de Hermite, obteve uma cadeira em Toulouse, foi um grande encorajamento para o homem que descobriu o integral de Stieltjes e a aplicação de fracções contínuas à teoria dos momentos. A apreciação era mútua: «*Vous avez toujours raison et j'ai toujours tort*»[176], escreveu

[176] «Você tem sempre razão e eu estou sempre errado.»

uma vez Hermite ao seu amigo. Os quatro volumes da *Correspondance* entre Hermite e Stieltjes contêm uma grande riqueza de material, principalmente sobre funções de uma variável complexa.

A tradição geométrica francesa foi gloriosamente continuada nos livros e artigos de Gaston Darboux. Darboux era um geómetra no sentido de Monge, aproximando problemas geométricos, com grande maestria, de grupos e equações diferenciais e trabalhando sobre problemas de mecânica com uma viva intuição de espaço. Darboux era professor no Collège de France e durante meio século exerceu a sua actividade de ensino. O seu trabalho mais influente foi o exemplar *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (4 vols., 1887-96), que apresentava os resultados de um século de pesquisa na geometria diferencial das curvas e superfícies. Nas mãos de Darboux, esta geometria diferencial ligou-se, das mais variadas maneiras, às equações diferenciais ordinárias e às derivadas parciais, assim como à mecânica. Darboux, com a sua habilidade administrativa e pedagógica, a sua fina intuição geométrica, a sua maestria nas técnicas de análise e a sua compreensão de Riemann, ocupava uma posição em França um pouco análoga à de Klein na Alemanha. Esta segunda parte do século XIX foi o período dos grandes tratados franceses de análise e suas aplicações, que muitas vezes apareceram com o título de *Cours d'analyse* e foram escritos pelos principais matemáticos. Os mais famosos são o *Cours d'analyse*, de Camille Jordan (3 vols., 1882-87), e o *Traité d'analyse*, de Émile Picard (3 vols., 1891-96), aos quais se acrescentam o *Cours d'analyse mathématique*, de Edouard Goursat (2 vols., 1902-05).

25

O maior matemático francês da segunda metade do século XIX foi Henri Poincaré, que, de 1881 até à sua morte, em 1912, foi professor na Sorbonne, em Paris. Nenhum matemático da sua época dominou uma tal variedade de assuntos e foi capaz



T. J. STIELTJES (1856-1894)



HENRI POINCARÉ (1854-1912)

de os enriquecer a todos. Cada ano dava lições sobre um assunto diferente; estas lições foram editadas pelos estudantes e cobrem um campo enorme: teoria do potencial, luz, electricidade, condução do calor, capilaridade, electromagnetismo, hidrodinâmica, mecânica celeste, termodinâmica, probabilidades. Cada uma destas lições era brilhante à sua maneira; juntas apresentam ideias que deram frutos nos trabalhos de outros, enquanto muitas ainda esperam uma elaboração futura. Poincaré, além disso, escreveu uma série de obras populares e semipopulares, nas quais tentou mostrar uma compreensão geral dos problemas da matemática moderna. Entre estas estão *La valeur de la science* (1905)[177] e *La Science et l'hypothèse* (1906)[178]. Além destas lições, Poincaré publicou um grande número de artigos sobre as chamadas funções automórficas e fuchsianas, sobre equações diferenciais, sobre topologia e sobre os fundamentos da matemática, tratando com grande maestria técnica e plena compreensão todos os campos pertinentes da matemática pura e aplicada. Nenhum matemático do século XIX, com a possível excepção de Riemann, tem tanto para dizer à geração actual.

A chave para a compreensão dos trabalhos de Poincaré poderia estar nas suas meditações sobre mecânica celeste, e em particular sobre o problema dos três corpos (*Les méthodes nouvelles de mécanique céleste*, 3 vols., 1893). Aqui revelou uma afinidade directa com Laplace e demonstrou que, mesmo no final do século XIX, os antigos problemas de mecânica relativos ao universo não tinham perdido a sua pertinência para o matemático produtivo. Foi em ligação com estes problemas que Poincaré estudou as séries divergentes, desenvolveu a sua teoria dos desenvolvimentos assimptóticos e trabalhou sobre invariantes integrais, a estabilidade das órbitas e a forma dos corpos celestes. As suas descobertas fundamentais sobre o comportamento

---

[177] Traduzido como *The Value of Science*, por G. B. Halsted.

[178] Traduzido como *Science and Hypothesis*, reed. por Dover Publications, Inc., 1952.

local das curvas integrais de equações diferenciais na vizinhança de singularidades, assim como o seu comportamento global, relacionam-se com os seus trabalhos sobre mecânica celeste. Isto também é verdade no que respeita às suas investigações sobre a natureza das probabilidades, outro campo no qual compartilhou o interesse de Laplace. Poincaré era como Euler e Gauss; onde quer que o abordemos, descobrimos o estímulo da originalidade. As nossas teorias modernas relacionadas com a relatividade, a cosmogonia, as probabilidades e a topologia foram todas influenciadas de modo vital pelos trabalhos de Poincaré.

26

O Risorgimento, o renascimento nacional da Itália, também significou o renascimento das matemáticas italianas. Vários dos fundadores da matemática moderna em Itália participaram em lutas que libertaram o seu país da Áustria e o unificaram; mais tarde combinaram posições políticas com as suas carreiras profissionais. A influência de Riemann foi grande e através de Klein, Clebsch e Cayley obtiveram os matemáticos italianos os seus conhecimentos de geometria e da teoria dos invariantes. Também se interessaram pela teoria da elasticidade, com o seu forte apoio geométrico.

Entre os fundadores da nova escola italiana de matemáticos estavam Brioschi, Cremona e Betti. Em 1852, Francesco Brioschi tornou-se professor em Pavia e em 1862 organizou o instituto técnico em Milão onde ensinou até à sua morte, em 1897. Foi fundador dos *Annali di matematica pura ed applicata* (1858), que indicava no título o seu desejo de emular os jornais de Crelle e Gergonne. Em 1858, em companhia de Betti e Casorati, visitou os principais matemáticos de França e da Alemanha. Volterra sustentou mais tarde que «a existência científica da Itália como nação» datava desta viagem[179]. Brioschi foi o represen-

[179] Ver Volterra, *Bull. Am. Math Soc.*, vol. 7, 1900, pp. 60-62.

tante italiano do tipo de pesquisa de Cayley-Clebsch nos invariantes algébricos. Luigi Cremona, depois de 1873 director da escola de engenharia de Roma, deu o seu nome à transformação birracional do plano e do espaço, «as transformações de Cremona» (1863-65). Foi também um dos criadores da estática gráfica.

Eugenio Beltrami foi um aluno de Brioschi e ocupou cátedras em Bolonha, Pisa, Pavia e Roma. Os seus principais trabalhos em geometria foram feitos entre 1860 e 1870, quando os seus parâmetros diferenciais introduziram um cálculo de invariantes diferenciais na teoria das superfícies. Outra contribuição deste período foi o seu estudo das chamadas «superfícies pseudo-esféricas», que são superfícies nas quais a curvatura de Gauss é uma constante negativa. Numa tal pseudo-esfera podemos realizar uma geometria bidimensional não euclidiana de Bolyai. Isto era, juntamente com a interpretação projectiva de Klein, um método para mostrar que não existiam contradições internas na geometria não euclidiana, pois tais contradições poderiam também aparecer na teoria das superfícies ordinárias.

Por volta de 1870, as ideias de Riemann tornavam-se cada vez mais um património comum da geração mais nova de matemáticos. A sua teoria das formas diferenciais quadráticas foi o assunto de dois artigos dos matemáticos alemães E. B. Christoffel e R. Lipschitz (1870). O primeiro artigo introduziu «os símbolos de Christoffel». Estas investigações, combinadas com a teoria dos parâmetros diferenciais de Beltrami, levaram Gregorio Ricci-Curbastro, em Pádua, ao chamado cálculo diferencial absoluto (1884). Era um novo simbolismo invariante originalmente construído para tratar da teoria das transformações de equações diferenciais às derivadas parciais, mas que proporcionou ao mesmo tempo um simbolismo ajustado à teoria das transformações das formas diferenciais quadráticas.

Nas mãos de Ricci e de alguns dos seus discípulos, nomeadamente Tullio Levi-Civita, o cálculo diferencial absoluto desenvolveu-se naquilo que agora chamamos a «teoria dos tensores».

Os tensores eram capazes de proporcionar a unificação de muitos simbolismos invariantes e também revelavam o seu poder no tratamento de teoremas gerais na elasticidade, hidrodinâmica e relatividade. O nome «tensor» tem a sua origem na elasticidade (W. Voigt, 1900).

O representante mais brilhante da geometria diferencial em Itália foi Luigi Bianchi. As suas *Lezioni di geometria differenziale* (2.ª ed., 3 vols., 1902-09) têm lugar ao lado da *Théorie générale des surfaces*, de Darboux, como uma exposição clássica da geometria diferencial do século XIX.

27

David Hilbert, professor em Gotinga, em 1900 apresentou ao Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, uma série de 23 projectos de investigação. Nessa época, Hilbert já tinha recebido o reconhecimento pelos seus trabalhos sobre formas algébricas e já havia preparado o seu famoso livro sobre os fundamentos da geometria — *Grundlagen der Geometrie*, 1900. Este livro era em muitos aspectos inspirado no trabalho pioneiro de Moritz Pasch, de Giessen, especialmente pelo seu livro *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), no qual Pasch estendeu aos fundamentos da geometria o modo de raciocínio axiomático que, ao mesmo tempo, levou Frege ao seu trabalho sobre os fundamentos da aritmética. Hilbert, no seu livro, faz uma análise dos axiomas em que a geometria euclidiana se baseia e explica como a pesquisa axiomática moderna é capaz de melhorar as realizações dos Gregos.

Nesta alocução de 1900, Hilbert tentou captar a direcção da pesquisa matemática das décadas passadas e esboçar as linhas gerais do trabalho produtivo futuro[180]. Um sumário dos seus projectos dar-nos-á uma melhor compreensão do significado da matemática do século XIX. Como se relacionam com os desen-

---

[180] Tradução no *Bull. Am. Soc.*, 2.ª série, vol. 8, 1901-02, pp. 437-479.

volvimentos posteriores das matemáticas do século XX, apresento este sumário no capítulo seguinte (secção 2)[181].

O programa de Hilbert demonstrou a vitalidade das matemáticas no final do século XIX e contrasta profundamente com a visão pessimista existente no final do século XVIII. Actualmente, alguns dos problemas de Hilbert foram resolvidos; outros ainda esperam a sua solução final. O desenvolvimento das matemáticas nos anos seguintes a 1900 não tem desapontado as expectativas que surgiram no final do século XIX. Até mesmo o génio de Hilbert, porém, não podia prever alguns dos desenvolvimentos surpreendentes que na realidade têm acontecido e estão a acontecer hoje em dia. As matemáticas do século XX seguiram o seu caminho próprio e novo para a glória.

BIBLIOGRAFIA

A melhor história da matemática do século XIX é:

Klein, F., *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, II*, Berlim, 1926-27. (Tradução inglesa da parte I, com apêndices, Brookline, Mass., 1979.)

Uma bibliografia de proeminentes matemáticos do século XIX é dada em:

Sarton, G., *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge, Mass., 1936, pp. 70-98. (Regista biografias e edições das obras dos principais matemáticos dos séculos XIX e XX. Mais material bibliográfico é dado nas edições de *Scripta mathematica*, 1932-presente.)

Além disso, ver:

de Launay, L., *Monge. Fondateur de l'École Polytechnique*, Paris, 1934.

Taton, R., *Monge*, Paris, 1951. (Versão abreviada em *Elemente der Mathematik*, supl. 49, Basileia, 1950.)

---

[181] Uma discussão dos problemas esboçados por Hilbert trinta anos depois aparece em L. B. Bieberbach, «Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über 'Mathematische Probleme' auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissig Jahren», in *Naturwissenschaften*, vol. 18, 1936, pp. 1101-1111. Mais recente: *Die Hilbertschen Probleme*, ed. por P. S. Alexandrov, Ostwalds Klassiker, vol. 252, Leipzig, 1971; trad. do russo.

Dunnington, G. W., *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, Nova Iorque, 1956.
Gauss, C. F., *Gedenkband anlässlich des 100. Todestages*, ed. H. Reichardt, Leipzig, 1957.
Klein, F., *Materialen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*, 8 vols., Leipzig, 1911-20.
Worbs, E., *Carl Friedrich Gauss: Ein Lebensbild*, Leipzig, 1955.
Quaternion Centenary Celebration, *Proc. Roy. Irish Acad. A*, vol. 50, 1945, pp. 69-98. (Entre os artigos pode ler-se «The Dublin Mathematical School in the First Half of the Nineteenth Century», de A. J. McConnell.)
«A Collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton», in *Scripta mathematica Studies*, Nova Iorque, 1951.
Kötter, E., «Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf von Staudt», in *Jahresber. Deut. Math. Verein*, vol. 5, 1901, pp. 1-486.
Black, M., *The Nature of Mathematics*, Nova Iorque, 1934. (Contém uma bibliografia sobre lógica simbólica.)
Kagan, V. F., *Lobačevskiĭ*, Moscovo e Leninegrado, 1945 (em russo). (Tradução francesa, Moscovo, 1974.) (Ver I. Toth, *HM*, vol. 6, 1979, pp. 91-97.)
Cento e Vinte e Cinco Anos de Geometria não Euclidiana de Lobačevskiĭ, A. P. Norden, ed. Moscovo e Leninegrado, 1952 (em russo.)
Merz, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century*, 4 vols., Londres, 1903-14.
Hadamard, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, 1945; reed. de Dover, 1954.
Prasad, G., *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century: Their Lives and Their Works*, 2 vols., Benares, 1933-34.
Struik, D. J., «Outline of a History of Differential Geometry», in *Isis*, vol. 19, 1933, pp. 92-120; *ibid.*, vol. 20, 1934, pp. 161-191.
Coolidge, J. L., «Six Female Mathematicians», in *Scripta math.*, vol. 17, 1951, pp. 20-31. (A respeito de Hipatia, M. G. Agnesi, E. du Châtelet, M. Somerville, S. Germain e S. Kovalevsky.)
Kovalevsky, Sonja, *Her Recollections of Childhood*, Nova Iorque, 1895. (Trad. do russo por I. F. Hapgood. Contém também a biografia por A. C. Leffler, tirada da edição sueca [1892] e que existe noutras traduções, p. ex., uma em alemão, Reclam ed., Leipzig.)
Em Memória de S. V. Kovalevskaya. Uma Colecção de Ensaios, Moscovo, 1951 (em russo). (Ver também *Istor.-mat. Issled.*, vol. 7 [1954], pp. 666-715.)
Wheeler, L. P., *Josiah Willard Gibbs*, New Haven, 1951.
Kollros, L., «Jakob Steiner», in *Elemente der Mathematik*, supl. 7, Basileia, 1947.
Winter, E., *B. Bolzano und sein Kreis*, Leipzig, 1933; Halle, 1949.
Kolman, E., *Bernard Bolzano*, Berlim, 1963.
Ore, O., *Niels Henrik Abel. Mathematician Extraordinary*, Mineápolis, 1957.

Infeld, L., *Whom the Gods Love,* Nova Iorque, 1948. (Um romance sobre a vida de Galois.)

Dalmas, A., *Évariste Galois révolutionnaire et géomètre,* Paris, 1956.

Biermann, K. R., «J. P. G. Lejeune Dirichlet, Dokumente für sein Leben und Wirken», in *Abh. Deutsch. Akad. Wiss., Klass für Math.,* n.° 2, 1959, pp. 1-68.

—, «Der Mathematiker Ferdinand Minding und die Berliner Akademie», in *Monatsberichte Deutsch. Akad. Wiss.,* 3, 1961, pp. 120-133.

Medvedev, F. A., *O Desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos no Século XIX,* Moscovo, 1965 (em russo).

—, *O Desenvolvimento do Conceito de Integral,* Moscovo, 1974 (em russo). (Ver *HM,* vol. 6, 1979, pp. 85-90.)

Manning, K., «The Emergence of the Weierstrassian Approach to Complex Analysis», in *AHES,* vol. 14, 1975, pp. 297-383.

[Kolmogorov, A. N., e Juškevič, A. P., eds.] *Matemáticas do Século XIX: Lógica Matemática, Álgebra, Teoria dos Números, Teoria da Probabilidade,* Moscovo, 1978 (em russo).

Scholz, E., *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré,* Boston, etc., 1980.

Biermann, K. R., *Gotthold Eisenstein,* Crelle 214/251, 1964, p. 1920.

Dugac, P., *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques,* Paris, 1976.

—, «Éléments d'analyse de Karl Weierstrass», in *AHES,* vol. 10, 1973, pp. 41-176 (bibliografia, pp. 297-383).

I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundation of Mathematics from Euler to Riemann,* Cambridge, Mass., 1970.

Herivel, J., *Joseph Fourier, the Man and the Physicist,* Oxford, 1975. (Cf. I. Grattan-Guinness, *Annals of Science,* vol. 32, 1975, pp. 503-514.)

Dauben, J. W., *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* Cambridge, Mass., 1979. (Ver também P. E. B. Jourdain, *Arch. Math. Phys.,* vol. 3, pp. 10, 14, 16 e 22.)

Rozenfel'd, B. A., *History of Non-Euclidean Geometry,* Moscovo, 1976 (em russo). (Ver *HM,* vol. 6, 1979, pp. 460-464.)

Morrison, P. e E., *Babbage's Calculating Machine of Differential Engine,* Nova Iorque, 1965.

Grabiner, J. V., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus,* Cambridge, Mass., e Londres, 1981.

[Rüdenberg, L., e Zassenhaus, H., eds.] *Hermann Minkowski: Briefe an David Hilbert,* Berlim, etc., 1973. (As cartas de Hilbert para Minkowski [ainda?] não foram recuperadas.)

Reid, C., *Hilbert,* Nova Iorque, 1970.

Métivier, M., Costabel, P., e Dugac, P., *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps,* Paris, 1981.

Marx, K., *Matematičeskie Rukopisi,* Moscovo, 1968. (Os manuscritos matemáticos de Karl Marx, em alemão com tradução em russo e comentários.)
Kennedy, H. C., «Karl Marx and the Foundations of the Differential Calculus», in *HM,* vol. 4, 1977, pp. 303-318. (Ver também *Science and Nature,* vol. 1, 1978, pp. 59-62.)
Bos, H. J. M., e Mehrtens, H., «The Interactions of Mathematics and Society in History. Some Explanatory Remarks», in *HM,* vol. 4, 1977, pp. 7-30, com uma extensa bibliografia.

CAPÍTULO IX

A primeira metade do século XX

1

Quando o século XX começou, as matemáticas encontravam-se num período de florescimento, embora as mais criativas se limitassem a uma parte do mundo. Na maior parte dos casos tratava-se de uma profissão académica, que se restringia, salvo poucas excepções, aos homens brancos e de extracção europeia. Os principais países continuavam a ser a França e a Alemanha. Em França, o centro era Paris; na Alemanha, menos centralizada, era Gotinga, seguida de muito perto por outras universidades, tal como a de Berlim. Também se publicavam trabalhos importantes de matemática na Rússia, Grã-Bretanha, Itália, Suiça, Escandinávia, Bélgica e Holanda, enquanto os EUA e o Japão começavam a mostrar que a Europa, embora mais importante, já não possuía o monopólio que mantinha desde o Renascimento. Poucas pessoas discordarão de que os principais matemáticos eram Klein e Hilbert, em Gotinga, e Poincaré, em Paris, embora também tivessem influência Volterra, em Itália, Darboux e Hadamard, em França, e Minkowski, em Zurique (e em breve também em Gotinga), para referir apenas alguns.

As academias continuavam activas e algumas, como a Académie des Sciences de Paris, tinham mesmo uma grande activi-

dade. A maior parte dos matemáticos, porém, ganhava a sua vida através de instituições de ensino e os que investigavam estavam ligados às faculdades universitárias. Alguns, tal como na Escandinávia e na Holanda, eram consultores de companhias de seguros, mas, embora os institutos politécnicos e as universidades técnicas possuíssem um corpo docente que preparava engenheiros, o que estabelecia uma estreita ligação com a indústria, eram poucos os matemáticos que estavam directamente ligados à produção. Este tipo de ligação começava a ocorrer. Charles P. Steinmetz, que estudou em Breslau e em Zurique e a partir de 1895 foi engenheiro-consultor na General Electric em Schenectady, Nova Iorque, aplicou a teoria das funções complexas a correntes alternadas, tal como o tinha feito Arthur Kennelly, que de 1902 em diante ensinou Engenharia em Harvard (e mais tarde também no MIT). Desde 1880 que Oliver Heaviside, em Inglaterra, já aplicava o cálculo ao electromagnetismo na indústria, ficando conhecido pela sua análise operacional e pela «equação do telégrafo». Continuou a ser um cidadão simples e a sua casa na praia era um «eremitério». Os nomes de Kennelly e Heaviside estão ligados à designação da camada da atmosfera também conhecida por «ionosfera».

Felix Klein, consciente da crescente importância das matemáticas na indústria, contribuiu eficazmente para a obtenção de apoios, quer de organização quer financeiros, por parte de interesses privados, para a pesquisa nas matemáticas aplicadas por físicos e engenheiros. Um dos resultados foi o Instituto de Investigação Aerodinâmica e Hidrodinâmica, em Gotinga, a cargo de Ludwig Prandtl, um engenheiro mecânico (1908). Tais institutos ainda eram raros na época.

Quanto aos matemáticos deste período, devemos, por isso, prestar atenção às universidades. Tal como os seus pares noutras profissões, os matemáticos organizaram ou estavam a organizar sociedades especializadas. Sobreviveram duas desde as suas origens, a de Hamburgo (1690) e a de Amesterdão (1776). Entre as mais novas sociedades matemáticas encontravam-se as de

Moscovo (1860), Londres (1865), Paris (1872), Edimburgo (1883), Palermo (1884), Berlim (1899) e Nova Iorque (1888, tornando-se em 1894 a American Mathematical Society). Seguiram-se outras: uma na Índia em 1907 e outra em 1908 e uma em Espanha em 1911; a organização na Polónia começou em 1911. Assim, os matemáticos podiam encontrar-se regularmente.

O primeiro encontro internacional com alguma importância deu-se em 1893, durante a Columbian Exposition em Chicago, onde Klein fez várias comunicações. O encontro seguinte, conhecido por Primeiro Congresso Internacional, deu-se em 1897, em Zurique. Havia cerca de duzentos participantes, sendo as línguas do congresso, o alemão e o francês. Uma das principais alocuções foi a de Adolf Hurwitz, de Zurique, que relacionou as funções analíticas com a teoria dos conjuntos de Cantor, que constituía ainda uma relativa novidade. Dois assuntos igualmente modernos integraram as discussões: os fundamentos da lógica (Schröder, Peano) e as funções de funções (Volterra), para as quais Hadamard sugeriu o termo *fonctionnelles*.

O congresso seguinte, novamente por ocasião de uma exposição universal, foi em Paris, em 1900. Ficou na memória colectiva dos matemáticos devido aos vinte e três problemas de Hilbert. Houve muitos encontros profissionais em Paris durante aquele ano; um deles foi o Primeiro Congresso Internacional de Filosofia, assistido por Peano, Whitehead e Russell, que discutiram os fundamentos lógicos da matemática. As matemáticas e a filosofia, percorrendo caminhos separados durante o século XIX (com algumas excepções, como Riemann e Boole), encontravam-se novamente. Tal como Émile Picard afirmou em 1897, em Zurique, «*Les mathématiques sont en grande coquetterie avec la philosophie*». Mas que filosofia?

Os congressos seguintes foram em Heidelberga (1904), Roma (1908) e Cambridge, Inglaterra (1912). Devido à primeira guerra mundial e às tensões que fez surgir, o primeiro congresso verdadeiramente internacional só se reuniu em 1928, em Bolonha.

A necessidade de uma visão de conjunto dos rápidos avanços e dos variadíssimos campos da matemática pura e aplicada levou Klein e os seus colegas alemães a uma grande empresa, a *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. A publicação começou em 1898 e continuou até 1935, como compilação de monografias, aspirando, com um certo sucesso, no espírito de Klein, a desenvolver a inter-relação dos diferentes domínios das matemáticas. Este enfoque estendia-se desde a secção I, *Arithmetik und Algebra*, até à secção VI, 2, *Astronomie*. Em 1904 começava a aparecer em francês uma edição revista, que será, no entanto, uma vítima da primeira guerra mundial. Aqueles que apreciassem uma compilação de monografias podiam utilizar o *Repertorio* (1897-1900), editado por Ernesto Pascal, professor em Pavia e, mais tarde, em Nápoles. Esta obra serviu de modelo ao *Repertorium der höheren Mathematik* (5 vols., 1910-29), com textos de vários autores sobre geometria e análise.

Com o *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* surgiu uma outra forma de expor as matemáticas. A publicação deste trabalho começou em 1871, com artigos concisos sobre publicações que apareceram desde 1868, e continuou ano após ano. Para o ano de 1900 apresentou uma lista de dois mil artigos de cerca de mil e quinhentos autores. Sendo de três anos o intervalo entre as informações do *Jahrbuch* e as publicações individuais, a Sociedade Matemática de Amesterdão começou a publicar a *Revue semestrielle des publications mathématiques* em 1892. Raramente noticiava algo mais do que títulos, mas o intervalo de tempo diminuiu bastante. Durou até 1938.

O número de jornais de matemática aumentou desde o aparecimento dos jornais de Crelle e Liouville. Entre eles destacamos os *Annali di matematica* (1858) o *Matematičeskiĭ Sbornik* (Moscovo, 1866), os *Mathematische Annalen* (1868), o *Bulletin des sciences mathématiques* (1870), o *American Journal of Mathematics* (1878), a *Acta Mathematica* (Suécia, 1882), os *Rendiconti di Palermo* (1885) e as *Transactions of the American*

Mathematical Society (1899). Mais tarde apareceram o *Mathematische Zeitschrift* (1918) e o *Fundamenta Mathematica* (1920), da Polónia. Todos estes jornais continuaram a existir. As academias também tinham as suas publicações, assim como algumas escolas, tal como a Ecole Normale de Paris e, mais tarde, também o MIT. Para manter toda esta informação foi necessário um esforço considerável, visto que o latim, como *lingua franca*, tinha desaparecido com Gauss e Jacobi. No entanto, um artigo publicado num jornal tão prestigiado como o *Mathematische Annalen* podia já encontrar uma vasta audiência.

Muitos livros publicados naquela época estão agora ultrapassados, mas alguns conservaram o seu interesse. Pensamos, por exemplo, nos livros de Hilbert, Hausdorff, Borel, Russell e Whitehead, Lebesgue e Sierspiński.

2

O historiador holandês Jan Romein, num estudo ricamente documentado[182], chamou a nossa atenção para as várias mudanças estruturais que ocorreram aproximadamente entre 1890 e 1910 em quase todos os campos da actividade humana, da economia à história e à música, todas no despertar das transformações sociais que iriam levar à catástrofe de 1914. A matemática não foi excepção, principalmente como resultado da sua dinâmica interna. Os principais factores desta transformação, interdependentes, podem ser observados na penetração crescente da teoria dos conjuntos de Cantor (agregados) em muitos campos das matemáticas —não sem dificuldade e mesmo protestos[183]— e nas investigações estreitamente relacionadas sobre os

---

[182] Cf. J. Romein, *The Watershed of Two Eras, Europe in 1900*, Middletown, Conn., 1978. Trad. do holandês, Leida e Amesterdão, 1967.

[183] «Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können» (Hilbert, *Math. Annalen*, vol. 95, 1926, pp. 161-190; cf. cap. VIII, secção 14 deste livro): «Ninguém nos poderá expulsar do paraíso que Cantor criou para nós.»

fundamentos das matemáticas e o desenvolvimento de estruturas abstractas na álgebra, lógica e espaços gerais. Cada vez mais o antigo conceito da matemática como teoria da quantidade foi abandonado; cada vez mais ela era considerada a teoria da estrutura em geral. Entre os novos campos abertos situavam-se a teoria da integração de Lebesgue, a análise funcional, o cálculo operacional e os tensores e havia debates entre formalistas, intuicionistas e logicistas. Mas o desenvolvimento não foi apenas intrínseco; sofreu um impacte considerável da física matemática, que depois de 1905, através da teoria quântica e da relatividade, desafiou a inteligência de matemáticos, físicos, astrónomos, filósofos e até de químicos e teólogos. Existiam também outras fontes exteriores de mudança, tais como a biologia (biométrica) e a engenharia.

A principal figura da geração mais velha era David Hilbert, de Gotinga, especialmente depois da morte de Poincaré, em 1912, e do interesse crescente pelos domínios da educação manifestado pelo seu colega Felix Klein, nas décadas anteriores à sua morte, em 1925. O estudo dos famosos problemas de Paris, de 1900, já referidos no capítulo anterior deste livro, dá uma boa ideia da situação das matemáticas por volta de 1900; apresentamos um resumo destas importantes propostas de investigação:

1. *O problema da cardinalidade do contínuo de Cantor.* Haverá algum cardinal entre o contínuo e o numerável? E o contínuo pode ser considerado bem ordenado?

2. *A consistência de (ausência de contradições entre) os axiomas aritméticos.* Se esta consistência existe, então a consistência dos axiomas geométricos pode ser estabelecida.

3. *A igualdade do volume de dois tetraedros, se a base, a área e a altura forem iguais.* Prová-lo só com a ajuda da divisão e da combinação (portanto, sem infinitesimais).

4. *O problema da linha recta como a ligação mais curta entre dois pontos.* Esta questão foi posta, por exemplo, pela geome-

tria de Minkowski e por certos problemas do cálculo das variações.

5. *O conceito de Lie de grupo de transformações contínuas sem postular a diferenciabilidade das funções que definem o grupo.* A questão pode levar a equações funcionais.

6. *O tratamento matemático dos axiomas da física.* Dos axiomas da geometria podemos passar aos da mecânica racional (tal como, por exemplo, fez Boltzmann em 1897) e a campos tais como a mecânica estatística, probabilidades, etc.

7. *A irracionalidade e transcendência de certos números.* São exemplos os números da forma α^{β} para $\alpha \neq 0$ algébrico e β algébrico irracional, tal como $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^{\pi} = i^{-2i}$ — são transcendentes ou irracionais? Hilbert pensava em Hermite, Lindemann e no número π (ver cap. VII, secção 24).

8. *Problemas na teoria dos números primos.* Referimo-nos à função zeta de Riemann e à conjectura de Goldbach, segundo a qual qualquer número par maior que 2 é, pelo menos de uma maneira, a soma de dois primos (1742, carta a Euler).

9. *Prova da lei mais geral de reciprocidade em corpos arbitrários de números.* Isto referia-se a alguns trabalhos mais recentes de Hilbert sobre corpos de números relativos quadráticos.

10. *Decidir se uma equação diofantina com números inteiros racionais é resolúvel com tais números.* Este era um antigo problema resolvido para certas equações de grau maior que dois e que se relacionava com o «grande problema» de Fermat.

11. *A teoria das formas quadráticas com coeficientes algébricos.* Mais uma vez este assunto se relaciona com o trabalho de Hilbert sobre corpos de números.

12. *Generalização do teorema de Kronecker sobre corpos abelianos para um domínio de racionalidade arbitrário.* Esta questão leva-nos a um domínio onde as funções algébricas, a teoria dos números e a álgebra abstracta se encontram.

13. *A impossibilidade de resolver a equação geral de grau sete através de funções com duas variáveis apenas.* Foi um problema

sugerido pela nomografia, tal como Maurice d'Ocagne o tinha explicado[184].

14. *A prova do carácter finito de certos sistemas de funções «inteiras relativas».* Alargando a noção de funções inteiras a *relativganz*, este problema pede a generalização dos teoremas de finitude da teoria clássica dos invariantes, devida a Hilbert e a Gordan.

15. *A fundamentação rigorosa da geometria enumerativa de Schubert.* Para isso será necessária uma firme fundamentação algébrica.

16. *O problema da topologia das curvas e superfícies algébricas.* A resolução deste problema encontra-se apenas no início, embora tenhamos alguns conhecimentos, especialmente no caso das curvas.

17. *A representação de funções definidas* (funções que nunca são negativas para o valor real das funções) *através de quocientes de somas de quadrados de funções.*

18. *Construção* (preenchimento) *do espaço por poliedros congruentes.* Este problema relaciona-se com uma questão de teoria dos grupos e cristalografia e com o trabalho de E. S. von Fedorov e A. Schoenfliesz[185].

19. *As soluções dos problemas variacionais regulares são sempre analíticas?* O termo «regular» está especificamente definido.

---

[184] D'Ocagne, da École Polytechnique de Paris, é considerado o criador desta ciência que resolve equações através de tábuas gráficas (também criou o nome). A sua *Nomographie* apareceu em 1891, seguida, em 1899, do seu *Traité de Nomographie.* O princípio é mais antigo; referimo-nos aos trabalhos de Junius Massau, de Ghent (1884).

[185] E. S. von Fedorov era director de uma mina nos Urales. Arthur Schoenfliesz, mais tarde professor em Francoforte, estava, juntamente com Klein, em Gotinga quando os trabalhos de Fedorov e o seu próprio (os 230 grupos cristalográficos no espaço) apareceram independentemente, em 1890 e 1891. Ver *AHES*, vol. 4, 1967, pp. 235-240. Fedorov, em 1891, também descobriu que havia precisamente dezassete grupos de simetria bidimensional, de padrões repetidos (tal como num papel de parede). Redescoberto por G. Polya e P. Niggli em 1924; ver H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Nova Iorque, 1981, cap. 4.

Hilbert observou que todas as superfícies de curvatura constante positiva têm de ser analíticas, não sendo isto válido para as superfícies de curvatura constante negativa.

20. *Os problemas de fronteiras em geral*, demonstrando em particular a existência de soluções de equações diferenciais às derivadas parciais com valores de fronteira dados e generalizações de problemas variacionais regulares.

21. *Prova da existência de equações diferenciais lineares com grupo de monodromia dado.* Este problema foi sugerido pela teoria das funções fuchsianas de Poincaré.

22. *Uniformização de relações analíticas através de funções automórficas.* Foi também sugerido pela prova de Hilbert que a uniformização de qualquer relação algébrica entre duas variáveis pode ser obtida através de funções automórficas de uma variável.

23. *Extensão dos métodos do cálculo das variações.* Hilbert acrescentou esta sugestão de «propaganda», porque achava que, apesar das contribuições de Weierstrass, este domínio ainda continha muitos pontos insuficientemente investigados e que eram potencialmente úteis para vários campos da matemática e da mecânica (tal como o problema dos três corpos).

«Agora realmente franqueou as perspectivas da matemática do século XX» («*du hast die Mathematik für das 20. te Jahrhundert in Generalpacht genommen*»), escreveu, de Zurique, Minkowski a Hilbert, de quem era amigo, após a comunicação de Paris. Embora esta observação possa parecer um tanto melodramática, a verdade é que os assuntos tratados naqueles vinte e três problemas continuaram a estimular profundamente a investigação até aos nossos dias. Alguns dos problemas foram resolvidos: o número 3 por Max Dehn (em 1904; demonstrou que a prova nem sempre é possível), o número 17 por Emil Artin (1920). Alguns foram resolvidos em parte, tal como o número 7 (por exemplo, por A. Gelfond, 1924); esta situação é compreensível, visto que estes «problemas», são mais propriamente

programas. É o caso do número 16, que abre o caminho a um domínio inteiramente novo das matemáticas. A vasta utilização do cálculo das variações, não só nas matemáticas puras, mas também em campos tais como a relatividade, revela que havia boas razões para a inclusão do problema 23[186].

O ano de 1900 também marcou a publicação, em dois volumes, do memorial da Sociedade Matemática Alemã, redigido por Schoenfliesz, sobre o desenvolvimento da teoria dos conjuntos de pontos. Trata-se aí tanto das aplicações das funções de uma variável real e da teoria da integração, como do conceito da medida de um conjunto de pontos, onde o autor discute as várias abordagens, incluindo as de Cantor, Peano, Jordan e Borel. Foi em relação a estas ideias que mais progressos viriam a ser feitos, desta feita em França.

3

Na última parte do século XIX, a teoria das funções reais tinha feito progressos fundamentais, especialmente no que respeita à dependência funcional, integração e diferenciação, ligando-se muitas vezes com a investigação em séries trigonométricas. Esta investigação tinha conduzido a novas condições para a integração, assim como à teoria cantoriana dos conjuntos.

Os nomes de Paul DuBois Reymond, em Berlim, Ulisse Dini, em Pisa, e Camille Jordan, em Paris, estão ligados a estes estudos.

Jordan, em 1880 e nos anos seguintes, introduziu, principalmente no *Cours d'analyse* (3 vols., 1882-84)[187], o conceito de

---

[186] Ver cap. VIII, nota 181; e também o resumo de H. Freudenthal, *DSB*, vol. VI, 1972, pp. 393-394. K. F. Sundman deu uma solução geral deste problema antigo e desafiante, em Helsínquia, entre 1907 e 1912. No entanto, esta solução não é prática para a computação numérica (actualmente executada por computadores).

[187] 3.ª ed., 1909-15.

função de variação limitada e, tal como Poincaré o fez na mesma época, teve em conta considerações topológicas. Procurou uma demonstração rigorosa do «teorema de Jordan» que afirma que uma curva simples fechada no plano o divide numa parte interior e noutra exterior. Colocou a integração no contexto dos conjuntos mensuráveis.

Esta ideia foi desenvolvida posteriormente por Émile Borel, na Ecole Normale de Paris, onde, por volta de 1890, enquanto estudante, foi *«extrêmement séduit»* pelas teorias de Cantor. Em 1894, na sua tese, introduziu o teorema de cobertura de «Heine-Borel»[188] e a prova de que um conjunto numerável tem medida zero, sendo o conceito de medida estendido de um conjunto finito de intervalos a um conjunto mais geral («medida de Borel»). Em 1898 publicou as *Leçons sur la théorie des fonctions*[189].

Foi neste ponto que começou o trabalho de Henri Lebesgue, também da Ecole Normale e também na última década do século XIX, quando era estudante. Mais tarde, depois de ter ocupado alguns lugares de professor na província, voltou a Paris em 1910, primeiro para a Sorbonne e depois (1921) para o Collège de France.

Lebesgue, na École Normale, contactava bastante com Borel, que era quatro anos mais velho, e com o seu contemporâneo René Baire [190]. A tese de Baire, de 1899, *Sur les fonctions de variables réelles,* fez que a teoria dos conjuntos de Cantor se aplicasse a funções-limite de funções contínuas, introduzindo

---

[188] A combinação destes nomes foi considerada insensata. Eduard Heine, professor em Halle, anunciou em 1872 um teorema equivalente ao de Borel, mas foi somente Borel quem salientou a sua importância.

[189] Nova edição, 1950.

[190] Lebesgue e Baire, com Gauss e Monge, pertencem aos poucos matemáticos importantes do passado com origem na classe operária (mais propriamente de origem artesã). O avô de Luzin era servo. Newton tinha uma origem rural. A maior parte dos principais matemáticos dos séculos XVII, XVIII e XIX saíram das classes médias ou mais elevadas.

funções de diferentes «classes de Baire». A sua tese foi seguida pela de Lebesgue de 1902: *Intégrale, longueur, aire.* Apelando directamente aos trabalhos de Jordan e Borel, Lebesgue introduziu a sua noção de medida: «Não há assunto mais importante do que este», escreveu em 1931, referindo-se ao papel que este conceito desempenhou na história humana. Baseando os seus trabalhos na sua noção de medida, considerada hoje em dia clássica, Lebesgue definiu a integração, cuja definição também é agora clássica, trazendo unidade a este campo. Um dos seus teoremas afirmava que uma função contínua de variação limitada possui uma derivada finita, excepto, talvez, num conjunto de medida zero.

Os trabalhos posteriores de Lebesgue, apoiados por outros matemáticos — tais como Maurice Fréchet, também da École Normale —, tornaram as suas teorias, recebidas por muitos matemáticos com um certo cepticismo (Para quê todas essas funções invulgares e «patológicas»?), cada vez mais aceitáveis. O integral de Lebesgue afastou muitas dificuldades encontradas desde a época em que Riemann definiu o seu integral e Weierstrass a sua teoria das funções reais. Fréchet introduziu os espaços abstractos (1908) e Arnaud Denjoy, aluno de Baire, uma generalização do integral de Lebesgue. As ideias de Fréchet foram seguidas por outros, entre os quais Stefan Banach, que desenvolveu, em 1920 e nos anos seguintes, os «espaços de Banach».

Diz-se que a insatisfação do jovem Lebesgue em relação à teoria das funções do seu tempo é ilustrada pela observação de que um lenço amarrotado deve ser uma superfície regrada, pois o seu professor de Nancy ensinara que uma superfície é aplicável a um plano se, e só se, for desenvolvível e, por isso, composta por linhas rectas. Entre tais «anomalias» também se situava a «curva de Peano» (1890), uma aplicação de um segmento de recta num quadrado, definida por funções contínuas x e y de uma variável t, de forma que lhe corresponde uma curva que preenche uma porção de plano. Várias outras

curvas «anómalas» foram descobertas, por exemplo, por Hilbert. Tais descobertas conduziram à questão da definição de uma curva e daí à questão da dimensão.

O *Grundzüge der Mengenlehre*, publicado em 1914 por Hausdorff, professor em Bona[191], foi uma importante contribuição para o avanço posterior da topologia dos conjuntos de pontos no património das matemáticas. Esta obra ofereceu uma definição axiomática daquilo que se tornou conhecido por espaço topológico.

Outra generalização do conceito de espaço, tão característica desta época, tornou-se conhecida por «espaço de Hilbert». É definido por uma estrutura métrica.

Dissemos que muitos matemáticos da geração mais velha estavam cépticos em relação ao interesse suscitado pelas funções «patológicas», tão diferentes das funções «regulares» a que estavam habituados. «*Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées*», escreveu uma vez Hermite a Stieltjes[192]. Eles consideravam a nova tendência uma espécie de teratologia matemática. Mas as «anomalias» continuaram presentes, tal como, por exemplo, a curva de Peano (1890).

Giuseppe Peano — de 1890 até à sua morte, em 1932, professor em Turim — foi pioneiro na lógica simbólica e no método axiomático, realçando a necessidade do rigor. Isto conduziu-o ao seu *Formulario matematico* (5 vols., 1895-1908), uma apresentação compreensiva dos teoremas da matemática (cerca de 4200), logicamente fundamentada com a ajuda dos seus silogis-

---

[191] Reescrito com o título de *Mengenlehre* (1927). Tradução inglesa: *Set Theory* (1957, da 3.ª ed., de 1937).

[192] «Recuso-me a ver, com receio e horror, esta praga lamentável de funções que não têm derivadas.» Quando estive na Universidade de Leida, em 1916, não ouvi nada acerca de Lebesgue, e mesmo em Gotinga, em 1925, algumas das faculdades apreciavam-no pouco. Quando aí encontrei Wiener, fiquei pela primeira vez a conhecer a importância do trabalho de Lebesgue.

mos. Peano não convenceu suficientemente o mundo matemático, mas a sua influência em questões de lógica e de matemática é inequívoca.

4

A teoria das funções reais avançou significativamente. Já referimos o impacte das investigações ligadas às séries trigonométricas, assunto ao qual Lebesgue aplicou a sua teoria num livro de 1906. A análise funcional e, principalmente, a teoria das equações integrais foram outros domínios de investigação. O termo *fonctionelle* provém, tal como vimos, de Jacques Hadamard (1897); substituiu o termo, mais restrito, «funções de linha». Esta ideia — estudar funções dependentes mais de funções (tais como curvas) do que de números (ou pontos) como variáveis — veio especialmente de Itália, onde se encontrava Vito Volterra. Aluno de Betti e Dini, em Pisa, professor em Turim de 1893 a 1900 e, depois, quarenta anos em Roma, Volterra introduziu as «funções de linha» em 1889. Foi conduzido, tal como em outros aspectos do seu trabalho, por considerações físicas, como, por exemplo, pelo facto de a energia de uma corrente depender da forma do fio metálico que se curva ou move num campo eléctrico.

Hadamard e, mais tarde, Fréchet tomaram como ponto de partida o cálculo das variações, um dos caminhos pelos quais Fréchet chegou aos espaços abstractos que contêm elementos mais abstractos do que as funções. Hadamard, um dos matemáticos mais influentes do seu tempo — desde a sua tese de doutoramento, de 1892, sobre a continuação analítica das séries de Taylor, até aos anos 50 (viveu quase noventa e oito anos)—, trabalhou em muitos domínios diferentes, da lógica e teoria dos números à hidrodinâmica. A sua *Série de Taylor et son prolongement analytique*, de 1901, foi chamada a «Bíblia» pelos que estavam fascinados pelo assunto e realmente foi durante muito tempo um livro influente neste campo.

Uma das maneiras pelas quais a análise funcional se afirmou foi através do estudo das equações integrais. O assunto era antigo; pensamos na transformação de Laplace (1792), na equação integral de Abel (1823) e nas de Liouville (1832 e mais tarde). Mas foi particularmente a teoria dos valores de fronteira na teoria do potencial e noutros campos em que as equações diferenciais ocuparam o lugar central (tal como nas oscilações num contínuo) que conduziu a uma investigação sistemática. Volterra introduziu o tipo linear de equações integrais que tem o seu nome em 1887. Mais tarde, em Estocolmo, em 1900 e 1903, Ivar Fredholm introduziu o mesmo tipo de equação. Ambos deram as soluções deste tipo de equação, mas foi de Fredholm que surgiu o impacte, principalmente porque um dos seus alunos deu uma lição sobre o seu trabalho num seminário de Hilbert, durante o Inverno de 1900-01. Foi a analogia de uma equação integral linear com um conjunto de *n* equações lineares com *n* variáveis que chamou particularmente a atenção [193].

O espírito de Hilbert iluminou-se imediatamente. Viu a conexão com a teoria do potencial e com a construção de funções de Green para fronteiras dadas e a relação dos valores próprios e dos vectores próprios com o problema análogo da redução das formas quadráticas a *n* variáveis, à forma canónica, assim como a relação com séries de funções ortogonais. Uma vez mais, isto podia conduzir a matrizes infinitas e a conceitos que desempenharam, e continuarão a desempenhar, um papel na física matemática. Foi assim que Hilbert, com o *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, de 1912,

---

[193] Hermann Weyl notou que «A descoberta de Fredholm sempre me pareceu que, em relação à sua chegada, veio atrasada. O que há de mais natural do que a ideia de que um conjunto de equações lineares, relacionadas com um conjunto discreto de pontos materiais, abre o caminho para uma equação integral quando se passa ao limite do contínuo?» (*Amer. Math. Monthly*, vol. 58, 1951). A equação de Fredholm pode ser escrita $\phi(x) + \int_0^1 f(x,y)\,\phi(y)dy = \psi(x)$, sendo ϕ a incógnita.

acrescentou um novo domínio à matemática. Muitos resultados antigos, enriquecidos por outros mais novos, podiam ser encarados num contexto mais amplo. Os espaços abstractos gerados por vectores de comprimento finito conduziram aos espaços métricos abstractos que hoje levam o nome de Hilbert. Outro exemplo era o teorema de Riesz-Fischer sobre a convergência em média (1907), associando os nomes do húngaro F. Riesz e de E. Fischer, de Colónia. Riesz contribuiu muito para a análise funcional, combinando as ideias de Borel-Lebesgue com as ideias germânicas, como se pode ver no seu último livro, *Leçons d'analyse fonctionelle* (1952) [194]. Também pensamos nas contribuições de Banach.

Este período também trouxe novos resultados no domínio clássico das funções analíticas reais e complexas, obtidos com grande sucesso por Poincaré e Picard e continuados por Borel, Hadamard e outros. Hadamard aplicou os seus resultados à teoria analítica dos números e, estudando a função zeta de Riemann, provou que $\pi(x)$, o número de números primos sendo $\leqslant x$, é assimptoticamente igual a $x/\log x$, provando assim uma sugestão de Gauss. No mesmo ano (1896) apareceu uma prova diferente deste «teorema dos números primos» pelo Prof. Charles de la Vallée Poussin, de Lovaina. (Ambos tinham a mesma idade, 30 anos, e atingiram quase a mesma longevidade.) Poussin, mais tarde, aperfeiçoou o teorema e provou a conjectura de Legendre na qual o $\log x$ da fórmula é substituído por $\log x - 1{,}08366$. O seu *Cours d'analyse infinitésimale* (2 vols., primeiramente publicado em 1903-06) foi durante muito tempo um clássico, com muitas edições.

Borel, na Sorbonne de 1909 a 1940, escreveu várias monografias sobre funções analíticas, como a de 1917 sobre funções monogéneas — as que têm uma derivada em todos os pontos do seu domínio. De 1898 a 1952 editou a *Collection de mono-*

---

[194] Escrito com B. Szökafnalvy-Nagy, traduzido para inglês como *Functional Analysis* (1955).

graphies sur la théorie des fonctions, em 50 volumes, 10 do próprio Borel, assim como outras *Collections*, uma delas, de 7 volumes, sobre probabilidades (1937-50).

Poincaré, em 1883, estabelecera que uma relação analítica entre duas variáveis pode ser uniformizada, isto é, as variáveis podem ser expressas por uma função automórfica unívoca de uma variável, mas uma prova satisfatória deste teorema da uniformização geral (ver o problema n.° 22 de Hilbert) foi somente dada em 1908 pelo próprio Poincaré e por Paul Koebe, graduado em Gotinga, mais tarde professor em Jena e Leipzig e que também obteve resultados na teoria das aplicações conformes.

Paul Painlevé, nove anos mais novo do que Poincaré, professor primeiro em Lille (1887) e depois em Paris (1892), voltou-se, após uma tese sobre funções analíticas, para as curvas algébricas e para as equações diferenciais e seus pontos singulares, cujos resultados aplicou à mecânica racional. Painlevé é um matemático de um tipo não raro em França e em Itália: uma pessoa importante na ciência e na política. Painlevé foi ministro da Educação em 1915 e da Guerra em 1917; como primeiro-ministro, no mesmo ano, escolheu Foch para representante no Supremo Conselho dos Aliados. Foi um aviador pioneiro, ensinou Aeronáutica e foi novamente primeiro-ministro em 1925. Entre os seus trabalhos encontra-se, *Leçons sur la résistance des fluides non visqueux* (1930-31), em 2 volumes.

5

A tendência para a generalização e profunda abstracção, característica de muita da matemática deste período, alargou-se aos Estados Unidos, onde Eliakim Hastings Moore[195], desde

[195] Não confundir com o seu aluno Robert Lee Moore, na Universidade do Texas desde 1920 e que se distinguiu com as suas contribuições para a axiomática e para a topologia; ou com Clarence L. E. Moore, de 1904 a 1931 no MIT, com contribuições na geometria diferencial e no cálculo tensorial.

1892 professor na Universidade de Chicago, recentemente fundada, foi um dos primeiros a criar uma escola americana de matemática — tal como Čebyšev fez na Rússia na década de 1870 e Sierpiński faria na Polónia na década a seguir a 1910. Como muitos outros estudantes americanos da sua geração, Moore foi para a Alemanha estudar; em Berlim ficou impressionado com o rigor de Kronecker e Weierstrass. Trabalhou em muitos campos, da axiomática às equações integrais, mas o seu nome está ligado essencialmente à sua «análise geral», um desenvolvimento da teoria das classes de funções num plano mais geral, influenciado por Cantor e Russell e suficientemente geral para estar na base e unificar teorias particulares, através de uma notação adequada[196].

Moore foi um professor e administrador bem sucedido. Entre os seus alunos encontravam-se Robert L. Moore, Oswald Veblen, George D. Birkhoff e Leonard E. Dickson, representantes da primeira geração de matemáticos americanos importantes formados no seu próprio país.

R. L. Moore e Veblen eram os representantes americanos do campo da matemática conhecido por *analysis situs* e que, depois de 1900, se tornou cada vez mais a parte da topologia designada por *combinatória* (em contraste com a topologia dos conjuntos de pontos), como foi explicado, por exemplo, por Hausdorff. Com origem num conjunto de problemas[197], como o de Euler sobre as sete pontes de Königsberg, ou o da banda de Möbius,

---

[196] A este propósito insistiu com Florian Cajori, um historiador das matemáticas americano nascido na Suíça, para que escrevesse a sua *History of Mathematical Notations* (1928-29), em 2 volumes.

[197] Os *puzzles* matemáticos foram populares durante muitos séculos, não raramente dando assunto às matemáticas «sérias». Livros muito conhecidos com *puzzles* deste género: F. E. A. Lucas, *Récréations mathématiques* (4 vols., Paris, 1891-94; reeditado em Paris, 1960); Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Leipzig, 1901), e H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics* (Londres, 1917; reeditado pela Dover, 1958). Recentemente, esta tradição foi seguida por Martin Gardner em *Scientific American*.

surgiu com as superfícies de Riemann em teoria das funções complexas, com o teorema da curva fechada de Jordan e, em particular, com as publicações de Poincaré, entre 1895 e 1904, sobre simplexes, complexes e os números de Betti de uma variedade

A esta teoria da homologia, com as suas considerações sobre grupos, cadeias e ciclos, dedicaram-se vários investigadores, entre eles Veblen e o seu colega James W. Alexander, de Princeton. Foram de especial importância nesta área as descobertas do jovem holandês L. E. J. Brouwer, que se iniciou em Amesterdão com a tese *On the Foundations of Mathematics* (1907, em holandês)[198] e depois, sob a influência dos problemas de Hilbert (especialmente o quinto), se voltou para vários campos, incluindo grupos contínuos e topologia. Entre 1908 e 1912 encontrou os seus teoremas de ponto fixo com a prova de que qualquer aplicação contínua de uma esfera de *n* dimensões nela própria tem, pelo menos, um ponto fixo invariante. Já desde Cantor e da curva de Peano que tinha surgido a questão da invariância da dimensão. Brouwer provava agora que duas variedades de dimensões diferentes não podem ser homeomórficas. Este era o «teorema da invariância» de Brouwer (1910). Também demonstrou a possibilidade de dividir um disco circular em três regiões com um mesmo contorno. Muito daquilo que é conhecido acerca da topologia deste período pode ser estudado através da *Analysis situs*, de Veblen (1922), e de *L'analysis situs et la géométrie algébrique* (1924), do seu colega (a partir de 1928) S. Lefschetz.

6

Neste período, a álgebra modificou o seu carácter ancestral. Em vez de tratar meramente da teoria das equações algébricas e da teoria associada dos invariantes e covariantes, tornou-se

---

[198] Tradução inglesa por A. Heyting, 1975.

a doutrina abstracta dos dias de hoje, com os seus anéis, corpos, ideais e conceitos afins. Uma das origens da nova álgebra foi o desenvolvimento da teoria dos grupos, partindo da teoria de Galois das equações algébricas e levando a uma teoria abstracta autónoma, especialmente à teoria dos grupos finitos, estabelecendo deste modo um modelo para a transformação da álgebra em geral. Podemos estudar este desenvolvimento em *Lehrbuch der Algebra* (2 vols., 1895-96), de Heinrich Weber, professor em Königsberg e, mais tarde, em Estrasburgo (em Königsberg teve como alunos Hilbert e Minkowski) [199]. O livro de Weber tem capítulos especiais sobre grupos e corpos algébricos. Frege e Peano também fizeram o seu trabalho pioneiro neste assunto e as suas consequências foram examinadas por Ernst Steinitz (que se encontrava nessa altura em Breslau) em *Algebraische Theorie der Körper* (1910). Neste livro, o corpo *(Körper)* é o conceito abstracto central, um sistema de elementos que tem duas operações, a adição e a multiplicação, satisfazendo a propriedades de tipo associativo, cumutativo e distributivo. O projecto de Steinitz era investigar todos os corpos possíveis — Steinitz também menciona uma influência neste trabalho: a *Theorie der algebraischen Zahlen,* de Kurt Hensel (1908; Hensel ensinava em Marburgo), com o seu estudo sobre o corpo dos números «p-ádicos».

O desenvolvimento desta nova álgebra continuou a partir de Steinitz, especialmente no período entre as duas guerras, sob a influência de Emmy Noether, filha de Max Noether, professor

---

[199] Weber, com o seu amigo Dedekind, foi o editor das obras de Riemann (1876) e também das lições de Riemann sobre equações às derivadas diferenciais parciais (1900-01), livro famoso durante muito tempo e conhecido por «Riemann-Weber». Só perdeu alguma da sua glória depois da publicação, em 1924 e mais tarde, do ainda famoso «Courant-Hilbert»: *Methoden der mathematischen Physik*. Com o seu colega J. Wellstein, de Estrasburgo, e outros, Weber também publicou a *Encyklopädie der Elementar-Mathematik* (1903-07), em 3 volumes. Apareceu também a sua correspondente italiana, *Enciclopedia delle mathematiche elementari*, editada por L. Benzolari, de Pavia (1930-50).

em Erlangen. Max era conhecido através do «teorema de Noether» sobre curvas algébricas (1873) e era colega do orientador de tese de Emmy, Paul Gordan (1907). Em 1915, Emmy começou a leccionar em Gotinga sob os auspícios de Hilbert, mas, como mulher e judia, teve de lutar contra grandes preconceitos. Com o advento de Hitler, perdeu o seu *Lehrauftrag,* em álgebra, muito mal pago, e ensinou de 1933 até à sua morte, em 1935, no Bryn Mawr College, perto de Filadélfia. Em Gotinga, com os seus alunos, desenvolveu uma teoria geral dos anéis comutativos e uma teoria dos ideais (inspirada por Dedekind) e módulos sobre anéis, assim como os problemas fundamentais das álgebras não comutativas, tudo num estilo estritamente axiomático [200]. Entre os seus alunos encontravam-se Emil Artin, Richard Brauer e Bartel R. L. van der Waerden, cuja *Moderne Algebra* (1930), muito utilizada, foi inspirada em lições de Artin (em Hamburgo) e Emmy Noether. Na URSS, a nova álgebra foi estimulada por Otto Schmidt, também conhecido como geofísico e organizador de investigações polares.

Existem muitas relações entre estes desenvolvimentos na álgebra e em outros domínios, especialmente entre a geometria algébrica e a teoria dos conjuntos. O próprio Steinitz salientou que certos teoremas não podiam ser demonstrados sem o *Auswahlprinzip,* o princípio da escolha, com o qual se relaciona o nome de Zermelo.

Ernst Zermelo, então em Gotinga, publicou o seu teorema da boa ordenação em 1902. Este teorema afirma que, em qualquer conjunto, uma relação $a < b$ («a precede b») pode ser introduzida de tal forma que para quaisquer dois elementos a e b se tem quer $a = b$, quer $a < b$, quer $b < a$, e que, dados três elementos, a, b e c, se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$, e que todo o subconjunto não vazio possua elemento mínimo. Este teorema aparece como resultado da influência geral da teoria

---

[200] *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern* (*Math. Ann.*, vol. 96, 1927).

de Cantor, onde o próprio Cantor tinha deixado muitas questões em aberto. Uma delas era a questão da grandeza dos conjuntos (o primeiro problema de Hilbert); outra, aquela possibilidade da boa ordenação. Desde que Zermelo baseou a sua prova no *Auswahlaxiom*, que afirma que de cada subconjunto de um dado conjunto se pode extrair um elemento, os matemáticos divergiram na aceitação de uma demonstração em que não pode ser dado um procedimento construtivo para encontrar tal elemento. Hilbert e Hadamard estavam dispostos a aceitar uma demonstração desse tipo; Poincaré e Borel não a aceitavam.

Esta controvérsia foi apenas uma parte da discussão geral sobre a natureza das demonstrações provocadas pela teoria dos conjuntos de Cantor, que conduziu a certas contradições, a certos «paradoxos» — contradições nos fundamentos da matemática! Algo semelhante aparecera duas vezes antes na história: a descoberta pitagórica dos irracionais, que era incompatível com a natureza do número *(vrithmos)*; e as contradições na fundamentação do cálculo na época de Newton, em que uma quantidade *h* ou *dx* tinha de ser zero e não ser zero na mesma operação. Eventualmente, as contradições foram eliminadas de uma maneira dialéctica, através de uma teoria envolvente. Em ambos os casos, a maior parte dos matemáticos não se interessaram muito ou mesmo nada e continuaram alegremente convencidos de que, apesar de tudo, a sua ciência era «verdadeira». Aconteceria o mesmo mais uma vez?

Os paradoxos resultantes da teoria de Cantor eram de natureza diferente. Um exemplo será suficiente: o de Bertrand Russell (1903). Seja *S* o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios. Pergunta: *S* é um elemento de si próprio? Se for, então não é um elemento de si próprio; se não for, então é um elemento de si próprio. Esta questão lembra-nos o antigo paradoxo dos Cretenses que afirmava que todos os cretenses mentiam. Tornava-se claro que se tinha de usar a teoria dos conjuntos com cuidado, especialmente na utilização do termo «todos», e evitar o descuido semântico.

Foram feitas muitas tentativas para revelar o valor de verdade das matemáticas. Um dos caminhos foi estabelecer um sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos de Cantor. Zermelo realizou-o em 1908. O seu sistema de sete axiomas usava somente dois termos técnicos, «conjunto» e «e» («elemento de»), e juntava uma formulação restritiva precisando as propriedades que definiam subconjuntos de conjuntos dados para evitar o paradoxo de Russell. O axioma 6 era o axioma da escolha. Zermelo deixou de parte a questão da independência e da consistência. Adolf Fraenkel, então em Marburgo, e Thoralf Albert Skolem, em Oslo, aperfeiçoaram o assunto, mas o axioma 6 continuou a ser objecto de discussão, especialmente depois da crítica de Kurt Gödel (1930 e mais tarde) [201].

Fraenkel tornou-se conhecido, mesmo fora do círculo de profissionais, pelo seu elegante *Einleitung in die Mengenlehre* (1919; edição aumentada, 1923), livro que teve origem durante a primeira guerra mundial, enquanto ele estava nas trincheiras com os seus companheiros soldados — situação que nos faz recordar Poncelet e os seus companheiros num campo prisional russo depois de 1812. Depois de 1929, Fraenkel ensinou no que mais tarde viria a ser Israel.

Hilbert, que no seu livro sobre os fundamentos da geometria (1899) reduziu a consistência dos axiomas da geometria aos da aritmética, estava muito interessado na consistência dos axiomas da aritmética, questão ensombrada naquela altura pelo debate sobre a construtividade e pelas aparentes contradições nos fundamentos. Com este propósito concebeu um método cha-

---

[201] Os trabalhos de Zermelo abrangeram muitos campos. Lembro-me de ouvir Alfred Pringsheim, na sua época um famoso orador em serões (tal como J. L. Coolidge nos EUA), declarar numa das suas *Bierreden* que a teoria das funções «*ist bekleidet mit dem Zermelim der Mengenlehre*» («estava vestida com o arminho da teoria dos conjuntos»; jogo de palavras, pois *zerm[el]ine* sugere *Ermelin* [alemão] = *ermine* [inglês]). [*N. do T.:* Em português, *ermine* significa «arminho».] Pringsheim, teórico das funções da escola de Weierstrass e, desde 1901 até à época nazi, professor em Munique, era sogro de Thomas Mann.

mado *formalismo:* a redução das matemáticas a um jogo finito, com um sistema infinito de fómulas definidas de modo finito. As regras do jogo devem ser consistentes; o jogador nunca deve cair em contradições do tipo 0 = 1.

Esta questão conduziu a uma área de pensamento chamada *metamatemática*, ou teoria da demonstração, uma ciência (ou filosofia) a um nível onde as matemáticas formalizadas podiam ser estudadas, os círculos viciosos evitados e as inconsistências eliminadas.

As ideias de Hilbert, mais tarde consignadas num livro escrito com W. Achermann (1928) e noutro com Paul Bernays (1934)[202], enfrentaram um considerável cepticismo. A maior crítica veio de L. E. J. Brouwer, que entrou no debate em 1907, com a sua tese, e defendeu que a verdade através da construtividade, mais do que através da consistência, era a essência da matemática. Entre 1913 e 1919, Brouwer desenvolveu o seu *intuicionismo,* no qual as matemáticas se baseiam, antes de mais, na *Ur-Intuition,* uma intuição básica dos números naturais. Só são aceites entidades para as quais pode ser dado um método de construção. Neste processo não é necessário aceitar a noção do meio excluído para conjuntos infinitos. Este intuicionismo, ao rejeitar uma parte considerável das matemáticas clássicas, abriu o caminho para um debate muitas vezes acrimonioso, nos anos 20, no qual Hermann Weyl, então em Zurique (tinha escrito a sua tese sob a orientação de Hilbert), tomou o partido de Brouwer. Naquela época, Weyl já tinha realizado trabalhos importantes sobre equações integrais e problemas de valor de fronteira e no seu livro *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), ajudado pelos teoremas topológicos de Brouwer, aperfeiçoou as suas definições na teoria das funções complexas. Weyl, mais tarde, modificou um pouco a sua posição em relação às questões dos fundamentos; as suas ideias podem

---

[202] *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928); *Grundlagen der Mathematik* (1934).

ser estudadas no livro *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1949), baseado num artigo que escreveu em 1926 [203].

Embora a maior parte dos matemáticos se recusassem a seguir Brouwer, rejeitando as partes da matemática que não se ajustassem ao requisito da construtividade, não podiam deixar de concordar com a superioridade de um procedimento construtivo a uma definição simples, mesmo sendo consistente com os axiomas. Depois de o programa de Hilbert se ter revelado irrealizável por Kurt Gödel em 1931, o intuicionismo de Brouwer podia sobreviver de uma forma renovada, especialmente através dos trabalhos do seu colega holandês Arend Heyting (1930 e mais tarde).

O artigo de Gödel que destruiu as esperanças de Hilbert, «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme» [204], apareceu antes dos *Grundlagen,* de Hilbert, de 1934. O seu principal resultado foi que, no caso em que um sistema aritmético S não apresenta contradições, esta imunidade às contradições não pode ser provada dentro dos meios desse sistema. Este artigo, tratando da completude, decidibilidade e consistência, abriu um novo período nos trabalhos sobre as questões de fundamentos.

Os *Principia Mathematica* (3 vols., 1910-13) foram escritos por Bertrand Russell e Alfred North Whitehead, ambos em Cambridge, sob a influência de Frege, Cantor e Peano. Foi o auge de um programa chamado *logicismo*, que diferia do formalismo de Hilbert na sua tentativa de construir toda a matemática através da dedução lógica a partir de um pequeno número de conceitos e princípios de natureza puramente lógica. Os volumes foram escritos com um simbolismo complicado,

---

[203] H. Weyl, «Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft», *in* R. Oldenburg, *Handbuch der Philosophie,* 1926.

[204] («Sobre as proposições formalmente indecidíveis dos *Principia Mathematica* e sistemas afins.») *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, 1931, pp. 173-198 (trad. para inglês em 1962). Ver E. Nagel e J. R. Newman, *Gödel's Proof*, Nova Iorque, 1958.

mas preciso, e aqueles que os estudaram admiraram a sua beleza lógica. Porém, tal como a abordagem de Hilbert, falhou no seu propósito fundamental, embora a sua contribuição para a lógica matemática (tal como com Hilbert) tivesse sido considerável.

Whitehead, onze anos mais velho que Russell (que nasceu em 1872 e morreu em 1970), já tinha escrito uma *Universal Algebra* (1898), baseando-se em Grassmann, Boole e Hamilton, e também escrevera sobre axiomas da geometria projectiva e descritiva (1906, 1907). Em 1924 estabeleceu-se na Universidade de Harvard e tornou-se muito conhecido como filósofo. A sua *Science and the Modern World* (1925) tem um profundo carácter platónico. Russell também tinha escrito um *Essay on the Foundations of Geometry* (1897).

8

Os fundamentos da geometria, o assunto dos trabalhos de Pasch, Whitehead e Russell, tornou-se tema de interesse geral para o mundo matemático e mesmo muito para além desse mundo, com o aparecimento dos *Grundlagen der Geometrie*, de Hilbert. Obra publicada primeiramente em 1899, passou por muitas edições, foi revista e corrigida, depois da morte de Hilbert, em 1943, por Paul Bernays, seu colaborador durante muito tempo em Zurique (9.ª ed., 1962), ele próprio um profundo *Grundlagenforscher*. O livro abriu o caminho para novas investigações sobre os fundamentos, não só da geometria euclidiana, mas também de outras geometrias. Um exemplo disso é o teorema de Max Dehn, de Gotinga (1903), sobre a necessidade do postulado arquimediano para o teorema de Legendre (que diz que a soma de dois ângulos de um triângulo plano não é maior do que a soma de dois ângulos rectos); mais tarde, Dehn resolveu o terceiro dos problemas que Hilbert apresentou em Paris.

Hilbert refere-se no prefácio do seu livro ao professor Giuseppe Veronese, de Pádua. Veronese foi um dos primeiros a construir uma geometria não arquimediana e também um dos

pioneiros da teoria métrica e projectiva dos hiperespaços S_n, em que uma superfície num espaço de dimensão cinco tem o seu nome (a sua projecção num espaço de dimensão três é a superfície de Steiner; ver cap. VIII, secção 16). Corrado Segre, colega de Veronese, estudou transformações lineares e superfícies algébricas (especialmente quádricas) em S_n; um dos seus alunos foi Julian Lowell Coolidge, desde 1908 em Harvard, tendo mais tarde estudado em Bona com Eduard Study. Coolidge ficou conhecido como crítico das formulações pouco exactas na geometria e, com Segre, um dos primeiros a ter uma visão rigorosa da geometria no domínio complexo.

Também encontramos um holandês neste domínio de estudos em S_n, de origem ítalo-germânica: Pieter Hendrik Schoute, de Groninga, perito em polítopos regulares, tais como o tesseracto (hipercubo em S_4). Muitos dos seus artigos foram escritos em colaboração com Alice Boole Stott, filha de George Boole, o lógico[205].

Uma abordagem totalmente diferente e mais fundamental dos hiperespaços remonta ao artigo de Riemann de 1854, com a introdução de variedades topológicas, dotando-as de um elemento linear quadrático do tipo $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$ (usando a nossa notação actual). Esta questão conduziu, através dos trabalhos de Christoffel, Lipschitz e Beltrami, ao cálculo diferencial abso-

[205] George Boole teve cinco filhas, todas muito talentosas. Uma delas, Mary Ellen, casou com C. H. Hinton, professor de Matemática de Princeton e autor de um livro que obteve certa popularidade, *The Fourth Dimension* (1909). Outra filha, Ethel Boole Voynich, tornou-se conhecida, especialmente na Rússia, como autora da novela *The Gadfly* (1897).

Alguns teoremas novos foram acrescentados, naquela época, à geometria elementar, entre eles o teorema de Frank Morley, durante muitos anos discutido e demonstrado e que afirma que os três pontos de intersecção dos trissectores adjacentes dos ângulos de um triângulo formam um triângulo equilátero (cerca de 1899, embora antes divulgado oralmente. Ver H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 1967, pp. 23-25. Morley, de origem britânica, tornou-se professor em Johns Hopkins, Baltimore.

luto de Gregorio Ricci-Curbastro, de Pádua (1883 e mais tarde). Foi feito um resumo das suas investigações, com numerosas aplicações aos invariantes diferenciais, à geometria diferencial em S_n, à elasticidade e à mecânica racional, num artigo dos *Mathematische Annalen* (vol. 54, 1901), intitulado «Méthodes de calcul différentiel absolu», escrito conjuntamente com o seu aluno Tullio Levi-Civita, que contribuiu com as suas próprias investigações. Este artigo tornou-se muito famoso depois de 1913, quando Einstein adoptou esse cálculo para a relatividade geral e deu a este *calcul absolu* o nome de *cálculo tensorial*. A adopção de Einstein conduziu a um grande número de investigações, nas quais os tensores eram aplicados a muitos problemas, e não só na relatividade, e a noção de cálculo tensorial foi desenvolvida para além da geometria de Riemann. Estas investigações foram muito estimuladas por um trabalho de Levi-Civita, de 1917, sobre uma noção de paralelismo, que hoje está associada ao seu nome.

Foram introduzidas novas ideias sobre este assunto por Weyl (1918) e A. S. Eddington (1923) e todo o novo cálculo foi sistematizado por J. A. Schouten (que descobrira independentemente o paralelismo em 1918), no seu *Ricci-Calcül* (1924, em alemão; em 1954 apareceu uma edição em inglês, totalmente reescrita).

Partindo do ponto de vista da teoria dos grupos de Lie, assunto da sua tese de Paris em 1894, Elie Cartan, desde 1909 em Paris, foi conduzido, através do estudo dos sistemas diferenciais, ao seu método das formas diferenciais exteriores[206]. A isto ligou, de uma forma muito original, a geometria diferencial de variedades gerais, introduzindo, depois de 1923, métodos topológicos no estudo de propriedades gerais dos grupos de Lie. Os seus artigos e livros sobre «espaços de conexão euclidiana afim e projectiva» revelam uma notável maestria em domí-

---

[206] Ver E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, 1922.

nios diferentes, combinando, na tradição de Monge e Darboux, análise com geometria e reciprocamente[207].

O termo *tensor* foi introduzido, no seu sentido moderno, por Woldemar Voigt, físico e cristalógrafo de Gotinga, em 1908. Trouxe-nos a chamada «análise vectorial» (compartilhando álgebra e cálculo). Começando com ideias dos trabalhos de W. R. Hamilton e H. Grassmann nas décadas de 1830 e 1840, a análise vectorial foi desenvolvida em 1880 por J. W. Gibbs e O. Heaviside como instrumento de trabalho para engenheiros e físicos. No final do século, esta ideia tornou-se popular e os textos sobre este assunto foram produzidos com regularidade, começando na Alemanha com um livro sobre a teoria de Maxwell, por A. Föppl, em Leipzig (1894). As ideias de Gibbs foram desenvolvidas pelo seu aluno E. B. Wilson em *Vector Analysis* (1901).

Muitos autores neste campo, incluindo Gibbs, estenderam o conceito de vector a outras quantidades dirigidas e enriqueceram o assunto com noções tais como as de vectores polares e axiais, díadas, afinores, rotores, tensores, etc. Como a notação diferia de país para país, o resultado foi uma considerável confusão, que aumentou com a introdução de novas noções quando, depois de 1905, a relatividade restrita alargou estes conceitos às quatro dimensões. Geralmente, faltava a fundamentação teórica para este cálculo. A clarificação começou quando Klein, por volta de 1908 (seguido por J. A. Schouten, em 1914), sugeriu a classificação das quantidades dirigidas na base da teoria dos grupos, alcançando, deste modo, uma posição que Cartan, com a sua maneira calma e independente, também tinha alcançado. Com a relatividade geral, depois de 1912, veio a pos-

---

[207] Por exemplo, ver E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, 1922; *Leçons sur la théorie des espaces à conexion projective*, 1937. A sua correspondência com Einstein sobre variedades com «teleparalelismo» (ou «paralelismo absoluto»), entre 1929 e 1932, foi publicada em 1979 pela Princetou University Press.

sibilidade de usar o cálculo tensorial de Ricci, como método global para compreender este campo; além disso, os seus fundamentos também podiam ser clarificados[208].

9

Este período também assistiu ao desenvolvimento da teoria clássica dos números. Na teoria analítica dos números já referimos os resultados de Hadamard e de la Vallée Poussin sobre a distribuição dos números primos. Em Gotinga, o representante deste campo era Edmund Landau, conhecido pelas formulações lapidares no estilo de Euclides, por exemplo em *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (1909). Em Inglaterra encontramos G. H. Hardy e J. E. Littlewood, de quem falaremos mais tarde; e na Rússia, G. F. Voronoï. Voronoï contribuiu para a geometria dos números. Este assunto tinha sido introduzido como um novo campo por Hermann Minkowski em *Geometrie der Zahlen* (1896; 2.ª ed., 1910), resultado dos seus trabalhos sobre formas quadráticas ternárias que conduziram às teorias dos corpos convexos e ao «empacotamento» das esferas (e outros corpos).

Minkowski (que, com 18 anos de idade, recebeu o Grand Prix da Academia das Ciências de Paris pela representação de um inteiro como uma soma de cinco quadrados inteiros [1881]) foi de 1896 a 1902 professor em Zurique, juntando-se então ao seu amigo Hilbert na Faculdade de Gotinga, onde ensinou até à sua morte, em 1909, com 45 anos. Muito interessado na electrodinâmica, surpreendeu o mundo culto com a sua lição *Raum und Zeit* (1908), em Colónia, onde colocou a relatividade especial de Einstein no espaço de Minkowski de quatro dimensões com

---

[208] Ver R. Weitzenböck, *Invariantentheorie* (1923), para as relações com a teoria clássica dos invariantes e covariantes; O. Veblen e J. H. C. Whitehead, *The Foundations of Differential Geometry* (1932), começaram a clarificar os fundamentos topológicos.

as palavras corajosas: «A partir deste momento, o espaço e o tempo cairão completamente nas sombras e apenas uma espécie de união entre os dois manterá a autonomia.»[209] Esta «proclamação» abriu o caminho, não só para a relatividade geral, mas também para um mundo de investigação em matemáticas puras, por ela inspirada.

10

A guerra de 1914-18 interrompeu e muitas vezes destruiu as relações internacionais. As matemáticas não foram excepção. Os matemáticos alemães denunciaram os franceses (embora Hilbert tivesse recusado fazê-lo); e os seus colegas franceses responderam no mesmo tom. Era a *Kultur* versus *culture*. Alguns matemáticos, tal como Volterra, aconselhavam os seus governos. Veblen levou um grupo de matemáticos a um campo de treino de balística em Aberdeen (Maryland), mas somente durante a segunda guerra mundial as matemáticas atingiram uma posição importante no Exército, que desde então se tornou cada vez mais forte. *The International Commission on the Teaching of Mathematics*[210], fundada no Congresso de Roma, em 1908, sob a presidência de Klein, extinguiu-se a pouco e pouco, depois de uma conferência prometedora em Paris, em Abril de 1914[211]. Já tínhamos referido o destino da *Encyclopédie* francesa.

O primeiro congresso internacional posterior à guerra foi realizado em Estrasburgo, em 1920 (uma escolha provocadora; a

---

[209] «Von Stund and sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.»

[210] Muitas vezes chamada IMUK na Alemanha. Foi restabelecida na conferência de Bolonha de 1928.

[211] Estavam presentes 160 delegados de dezassete países. Entre os participantes encontravam-se Castelnuovo (presidente), Borel, Darboux, D'Ocagne e Stäckel. Ver o *Compte-Rendu*, por H. Fehr (Genebra), de 1914; e o relatório de R. C. Archibald (Providence, RI), de 1918, com informações sobre dezoito países.

cidade tinha sido recuperada há pouco tempo pela França), e excluiu as nações derrotadas. O mesmo aconteceu em Toronto, em 1924. Mas no congresso de Bolonha de 1928, sob a presidência de S. Pincherle, a discriminação foi abandonada. A Europa ainda dominava; entre os 836 delegados, 52 vinham de fora, dos EUA. A International Mathematical Union, fundada em 1919, em Bruxelas, também se tornou verdadeiramente internacional. A União Soviética participou com 37 delegados em 1928. No congresso de Zurique de 1932 havia 667 participantes de quarenta países, incluindo 66 dos EUA e 10 da URSS. O congresso internacional seguinte foi em Oslo, em 1936, mais pequeno que os anteriores (487 participantes, vinte e sete países); com Hitler, a crise mundial intensificou-se. Entretanto eclodiu a segunda guerra mundial e o congresso internacional seguinte só se reuniu em 1950.

As matemáticas ainda se centravam nos países tradicionais da Europa, mas tanto os EUA, como a recentemente formada URSS, avançavam rapidamente. Harvard, Princeton, Chicago, Moscovo e Leninegrado já eram centros importantes. Existia na Polónia uma escola importante que se concentrava na topologia e nas questões de fundamentos; na Hungria e na Itália continuava uma grande investigação, até que neste países (especialmente na Polónia), tal como na Alemanha e na Áustria, o fascismo começou a lançar as suas sombras. Agora, as modernas matemáticas também vinham do Canadá, Japão, Australásia e Índia. As publicações de matemática surgiam, no seu conjunto, com regularidade.

A especialização revelou-se através da publicação de jornais dedicados a campos particulares. A *Fundamenta Mathematica*, fundada em 1920, na Polónia, dedicava-se à topologia e aos fundamentos; o periódico alemão *ZAMM* (*Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*) apareceu em 1921. Surgiram várias séries de monografias especializadas: o *Mémorial des sciences mathématiques*, em França, o *Ergebnisse der exakten Wissenschaften* e os *Grundlehren* («as séries amarelas» da Sprin-

ger), na Alemanha; e a *Monografie Matematyczne*, na Polónia. Existiam conferências internacionais sobre assuntos específicos, como as conferências sobre matemáticas aplicadas e mecânica, em Delft (1924), e uma sobre tensores (1934) e outra sobre topologia (1935), em Moscovo.

11

Gotinga, durante a época da República de Weimar, manteve o papel director que desempenhava desde a chegada de Klein, em 1886. Hilbert era ali considerado o grande senhor das matemáticas, mesmo depois de se reformar oficialmente, em 1930. A faculdade era muito considerada, com Edmund Landau na teoria dos números; Gustav Herglotz em vários campos da análise, tais como equações diferenciais e integrais; Richard Courant, sucessor de Klein, aplicando as ideias de Klein e Hilbert aos problemas de fronteira, utilizando o princípio de Dirichlet; e, depois de 1931, Hermann Weyl, que veio de Zurique como sucessor de Hilbert e cuja visão, tal como a de Hilbert (o seu orientador de tese), englobava quase toda a matemática. De 1902 até à sua morte prematura, em 1909, Minkowski também leccionou nessa Faculdade. Em Gotinga estavam também Paul Bernays, colaborador com Hilbert na tentativa de reconstruir os fundamentos da matemática, e Emmy Noether, pioneira da nova álgebra. Os aspectos aplicados foram representados por Ludwig Prandtl (aerodinâmica) e Carl Runge (problemas numéricos), assim como por Felix Bernstein, o do teorema de equivalência de Cantor-Bernstein na teoria dos conjuntos; a partir de 1921 dirigiu o Instituto de Estatística Matemática. Perto deste também havia um importante departamento de física, onde Max Born conduziu um grupo de jovens físicos à era da mecânica quântica — dois destes jovens físicos eram Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli. Estudantes e visitantes continuavam a afluir a esta Meca, enchendo as suas aulas e seminários. Um dos livros que surgiram desta grande actividade foi o já mencionado

«Hilbert-Courant»: *Methoden der mathematischen Physik* (1924 e mais tarde), o qual apareceu no momento em que a nova física exigia o tipo de matemática apresentado nesse livro (como o estudo de problemas de fronteira).

Hilbert, com 60 anos de idade em 1922, foi chamado de Königsberg a Gotinga (por iniciativa de Klein) em 1896. O seu primeiro trabalho foi sobre invariantes algébricos e teoria algébrica dos números, onde o seu *Zahlbericht*, apresentado à Sociedade Matemática Alemã em 1897, foi durante décadas considerado o texto-modelo. Entretanto, por volta de 1900 surgem os fundamentos da geometria e cerca de 1906 o cálculo das variações e o princípio de Dirichlet e as equações integrais estabelecem-se como um campo especial. Então, depois do seu interesse axiomático pela física matemática (cerca de 1913, na relatividade), veio finalmente, depois de 1918, o seu trabalho sobre os fundamentos das matemáticas (a escola formalista). Não só consolidou campos teóricos importantes, mas também se ocupou da solução de problemas especiais, tal como o teorema de Waring, que afirma que, no espaço tridimensional, qualquer superfície de curvatura constante negativa possui singularidades. A sua abordagem formalista dos fundamentos não nos deve fazer esquecer o seu grande interesse pela física matemática. Através das suas publicações, dos seus vários alunos e do seu famoso seminário, influenciou todo o mundo matemático e orientou-o quer nas respectivas matérias, quer na sua maneira de pensar estritamente lógica. Morreu em 1943. Como já referimos, o sucessor de Hilbert, depois da sua retirada, em 1930, foi Hermann Weyl.

Weyl fora aluno de Hilbert e de 1913 a 1930 ensinara em Zurique. Seguiu Hilbert nos estudos sobre equações integrais e problemas de fronteira, relacionados com problemas do tipo Sturm-Liouville e operadores em espaços de Hilbert. Em 1913 apareceu *Idee der Riemannschen Fläche*. Weyl voltou então à teoria da relatividade geral com o seu influente *Raum-Zeit-Materie* (1918), depois do que explorou muitos campos, especialmente na teo-

ria dos grupos e nas suas relações com a física quântica. Exprimiu as suas ideias em muitos livros e artigos, continuando a sua actividade, depois de 1933, no Instituto para Estudos Avançados de Princeton. O seu já citado livro *Mathematics and Natural Sciences* (1949) fornece uma visão detalhada da forma como compreendia as matemáticas e a natureza, com uma base histórico-filosófica.

Já nos referimos a Emmy Noether como pioneira da nova álgebra dos ideais. Era —e é— a matemática mais ilustre da história das matemáticas. Começou em Erlangen (1907), trabalhando na teoria de Gordan dos invariantes das formas algébricas (ternárias e biquadráticas); entretanto, em Gotinga, onde chegou em 1915, convidada por Hilbert, aliou-se primeiro a ele e a Klein na abordagem da nova teoria de Einstein do ponto de vista axiomático da teoria dos grupos. Mas o seu principal impulso foi dado à nova álgebra abstracta. Com todo o tipo de preconceitos contra ela, nunca conseguiu ter um título mais elevado do que o de *nichtbeamteter ausserordentlicher Professor*[212]. Em 1928-29 ensinou em Moscovo. Tinha uma capacidade excepcional para compreender o cerne de um problema de uma forma abstracta.

Também existiram departamentos matemáticos importantes em outras universidades alemãs. Em Berlim encontramos I. Schur na álgebra e teoria dos grupos e Erhardt Schmidt, o do «processo de ortogonalização de Schmidt», nos espaços de Hilbert (1907). Na Faculdade de Munique, depois de 1924, encontrava-se Constantin Carathéodory, nascido em Berlim, de descendência grega, conhecido pelos seus estudos no cálculo das variações, aplicações complexas e uniformização; editou o *Methodus inveniendi* para a *Opera Omnia* de Euler.

Grande parte deste desenvolvimento terminou quando os nazis tomaram o poder, em 1933. É o caso de Gotinga, que

---

[212] Este título masculino não lhe dava direito a salário. Mas um *Lehrauftrag* proporcionava-lhe um pequeno rendimento.

sofreu com a partida para o exílio de muitos dos seus melhores elementos (Courant, Noether, Weyl), ou com demissões (Landau).

12

Os matemáticos franceses sofreram muito com a terrível perda de jovens na guerra, apesar de ainda ter havido figuras ilustres: Hadamard, Fréchet, Gaston Julia, Paul Levy, Borel e Cartan, cujos estudos se estendiam dos espaços abstractos e da teoria das funções á teoria dos grupos e probabilidades. Paris continuou a ser o centro, com investigações cruciais em física, representadas pelos Curie e Paul Langevin, orientador da tese de Louis de Broglie (1908). Os resultados eram frequentemente publicados em séries de livros, tais como as *Actualités scientifiques et industrielles* (1929 e mais tarde) e o *Mémorial*, que já referimos. Tanto as *Actualités*, como os *Annales* do Instituto Henri Poincaré (1930 e mais tarde), contêm estudos tanto de matemáticas puras e aplicadas como de física. Os homens da geração mais antiga ensinaram e publicaram o suficiente para inspirar a geração que em 1940 iniciou o empreendimento de Bourbaki [213].

Tinha-se desenvolvido outro centro, também com características especiais, em Cambridge, Inglaterra, acabando com a longa insularidade da Grã-Bretanha. Também aqui, excelentes matemáticos eram acompanhados por excelentes físicos: a partir de 1919, Ernest Rutherford presidiu ao Cavendish Laboratory. A nova geração da análise estava aí representada por J. E. (John Edensor) Littlewood e G. H. (Godfrey Harold) Hardy. Hardy, desde os seus tempos de estudante, em 1896, até à sua reforma, em 1942, esteve no Trinity College, excepto durante o período de 1919 a 1931, em que permaneceu em Oxford; Littlewood também ficou em Cambridge desde os seus tempos de estudante até

[213] Ver C. Boyer, *History of Mathematics*, 1968, pp. 674-676.

à reforma, em 1950 (desde 1910 também no Trinity College), permanecendo somente três anos em Manchester. O *Course in Pure Mathematics* (1908), de Hardy, introduziu em Inglaterra, de uma forma rigorosa, os conceitos modernos da análise (número, limite, função). Muitas das suas posteriores investigações —todas em matemática «pura», que ele louva em *Mathematician's Apology* (1940)[214], obra controversa e muitas vezes citada— foram realizadas, desde 1911, com a colaboração de Littlewood, e nos seus trabalhos encontram-se teoremas de «Hardy-Littlewood» sobre séries de Fourier, os problemas de Waring e Goldbach, aproximações diofantinas e o teorema dos números primos. O «incidente romântico» na vida de Hardy (tal como Hardy o designou) foi a sua descoberta do génio indiano da teoria dos números, Srinivasa Ramanujan, de Madrasta, a quem Hardy possibilitou a permanência em Cambridge de 1917 a 1919, regressando à Índia, onde morreu em 1920, com 32 anos. A colaboração entre os dois homens levou a vários resultados, especialmente em *partitio numerorum*.

Hardy foi aluno de Bertrand Russell, que, com Hardy, atraiu muitos visitantes a Cambridge, tal como A. N. Whitehead, colaborador de Russell nos *Principia*. Foram colegas de Hardy os analistas A. E. Besikovitch e E. C. Titchmarsh, este o autor de um livro muito conhecido, *Theory of Functions* (1932). Entre as matemáticas puras de Hardy e a física de Rutherford encontrava-se R. H. Fowler, professor de P. A. M. Dirac. Tanto Dirac como Littlewood auxiliaram Fowler na realização do livro *Statistical Mechanics*, uma obra-modelo (1929).

Todos estes homens atraíram estudantes e visitantes a Cambridge. Especialmente nos anos 30, com Hardy de regresso a Oxford, muitos matemáticos, frequentemente refugiados do fascismo ou da revolução, foram para Cambridge, cuja Universidade substituía Gotinga como centro da actividade matemática.

---

214 Reeditado em 1967 com um prefácio de C. P. Snow (Hardy morreu em 1947).

Edmund T. Whittaker, de 1912 a 1946 em Edimburgo, era um físico matemático (e filósofo católico), mas proporcionou a gerações inteiras de estudantes o tão útil quanto agradável livro *Modern Analysis*, o «Whittaker-Watson» (1915), escrito conjuntamente com G. N. Watson, então em Cambridge. É uma lúcida exposição das principais funções complexas transcendentes. Continha exercícios, alguns muito difíceis, tal como os livros de Hardy e Titchmarsh, uma tradição inglesa que se iniciara com os antigos exames Tripos que davam ênfase à ginástica da resolução de problemas, tradição só gradualmente abandonada.

William Henry Young, formado em Cambridge, ocupou várias posições académicas, uma delas em Calcutá (1913-16). Independentemente (por volta de 1902), introduziu os métodos da escola francesa de Lebesgue e Baire em Inglaterra e trabalhou em séries de Fourier e noutros campos da análise. Fê-lo em colaboração com a sua mulher, Grace Chisholm Young [215], que, com Klein, escrevera uma dissertação sobre trigonometria esférica do ponto de vista da teoria dos grupos (1895). Eram os pais de Laurence Young, que nos deu um testemunho muito pessoal sobre Cambridge na época de Hardy-Littlewood, tal como fizera Constance Reid relativamente ao ambiente de Gotinga[216].

13

A Revolução de Outubro de 1917 teve um grande impacte no desenvolvimento da ciência russa e as matemáticas beneficiaram desse desenvolvimento. Já existia uma forte tradição, baseada

---

[215] *Theory of Sets of Points*, 1906.

[216] L. Young, *Mathematicians and Their Times*, Amesterdão, etc., 1981; C. Reid, *Hilbert*, Nova Iorque, 1970; *Courant in Göttingen and New York*, Nova Iorque, 1976. Um dos primeiros professores de Young foi o reitor Edwin A. Abbott, cuja fantasia sobre um mundo de duas dimensões, *Flatland* (1884), foi muito apreciada, principalmente quando Minkowski e Einstein introduziram o mundo de quatro dimensões, um mundo que iria ser popularizado devido ao interesse maciço pelas teorias de Einstein durante os anos 20 e 30.

em Lobačevskiĭ, em M. V. Ostrogradskiĭ e, especialmente, em P. L. Čebyšev (Tschebycheff), fundador da escola de matemática de Sampetersburgo, sob cuja inspiração A. A. Markov e A. M. Ljapunov receberam a sua formação. Čebyšev trabalhou em Sampetersburgo desde 1847 até à sua morte, em 1894, enriquecendo muitos campos, desde a teoria dos números (teorema dos números primos), problemas de aproximação, integração e geometria diferencial à cinemática e probabilidades, compreendendo particularmente bem as relações entre domínios puros e aplicados. Nas probabilidades insistiu nas definições precisas e conduziu Markov (de 1886 a 1905 professor e até 1922 professor emérito em Sampetersburgo) às «cadeias de Markov» sobre variáveis aleatórias (1906 e mais tarde). Estas cadeias mostraram a sua importância em física estatística, genética e economia; os seus fundamentos teóricos foram reforçados por A. N. Kolmogorov[217].

As investigações de Ljapunov estavam na linha das de Laplace, tanto nas suas contribuições para a teoria das probabilidades, onde generalizou o teorema fundamental do limite (1900-01), como nas suas investigações sobre mecânica celeste.

Também pertence à escola de Sampetersburgo G. F. Voronoĭ, desde 1894 professor em Varsóvia (sob o domínio russo), conhecido pelos seus trabalhos sobre a teoria dos números.

Depois da Revolução, Moscovo tornou-se a capital da União Soviética. A escola de matemática de Moscovo foi desenvolvida especialmente pela multímoda influência de N. N. Luzin, aluno de D. T. Egorov, que é conhecido através de um teorema sobre funções mensuráveis (1911). Luzin foi para Gotinga e Paris (1901, 1910) e ensinou em Moscovo de 1914 até à sua morte, em 1953. Foi dos primeiros a aplicar a teoria da medida a funções reais e também investigou séries trigonométricas. Nos seus

---

217 Para o desenvolvimento das cadeias de Markov, durante esta época, cf. M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcult des probabilités*, Paris, 1934.

seminários, e através das suas lições e livros de texto, formou gerações inteiras de jovens em muitos campos da análise, integração e teoria dos conjuntos. Sierpiński, que era para a Polónia o que Luzin era para Moscovo, contactava frequentemente com Luzin.

Entre os jovens influenciados por Luzin encontravam-se Paul S. Aleksandrov, A. Ja. Hinčin (Khintchin), P. S. Urysohn, A. N. Kolmogorov, P. A. Ljusternik e L. S. Pontrjagin. Aleksandrov, com Pontrjagin e Urysohn (o último morreu afogado em 1924, com 26 anos) estabeleceram a escola topológica de Moscovo, que manteve contactos firmes com o Ocidente (Gotinga, Brouwer, Hausdorff). Muitos destes jovens seguiram Luzin na pesquisa sobre a teoria das funções. É característico de toda esta área de actividade o interesse das relações entre a teoria e as aplicações à mecânica, física e indústria, realizações encorajadas pelo Governo Soviético. O estudo das probabilidades continuava vivo; um dos resultados teóricos mais conhecidos é a axiomática de Kolmogorov baseada na teoria dos conjuntos: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1934).

O principal aritmético era I. M. Vinogradov, primeiro em Leninegrado e desde 1934 em Moscovo. As suas numerosas contribuições, influenciadas por Voronoĭ e, em muitos aspectos, afins das de Hardy e Littlewood, tratavam da teoria de posição dos números e dos problemas de Waring e Goldbach. A este respeito pensamos no oitavo problema de Hilbert.

A geometria estava representada por V. F. Kagan, primeiro em Odessa e desde 1922 em Moscovo. Os seus primeiros trabalhos foram sobre os fundamentos da geometria, sob a influência das ideias de Hilbert, mas em Moscovo dedicou-se à geometria diferencial e ao cálculo tensorial, sobre o que realizou um conhecido seminário internacional com os seus *Trudy (Transacções),* publicados em 1933 e posteriormente. Nesta época era uma autoridade sobre Lobačevskiĭ.

Harkov (Kharkov) era uma universidade ucraniana importante, onde Serge Bernstein ensinou de 1907 a 1933, indo depois

para Sampetersburgo e, em 1943, para Moscovo. Tinha estudado em Paris e em Gotinga, escreveu a sua tese em Paris (1904) e os seus trabalhos posteriores revelam a influência de Čebyšev (aproximações, probabilidades) e de Weierstrass. Mais uma vez encontramos um profundo interesse por problemas de matemática aplicada (biologia).

Em 1919, a Polónia tornou-se uma nação independente. Já vimos que, em 1911, Sierpiński lançara as bases da escola polaca de topologia, que conduziu ao *Fundamenta Mathematica*, o primeiro jornal exclusivamente dedicado a uma área restrita. Entre os alunos de Sierpiński encontramos K. Kuratowski e Alfred Tarski, o último dos quais ficou conhecido no campo da lógica e que mais tarde foi para Berkeley, na Califórnia[218].

Uma segunda escola se desenvolveu em Lwów (então na Polónia), com Stefan Banach, e em Lublim, com Hugo Steinhaus. Nesta escola, Stefan Banach deu grandes contribuições para a análise funcional, conduzindo-a do estudo de aspectos particulares devidos a Hilbert e a Volterra a um todo compreensivo. As contribuições de Banach estavam muito ligadas à introdução do conceito de espaços lineares normados, que, quando completos, levam o seu nome (1922 e mais tarde). Steinhaus prestou muita atenção às aplicações, das probabilidades à biologia e à engenharia; foi admirado pela obra *Mathematical Snapshots*, um clássico das matemáticas visuais[219]. Banach e Steinhaus publicaram, desde 1929, o jornal *Studia Mathematica*.

---

[218] K. Kuratowski, *A Half Century of Polish Mathematics: Remembrances and Reflections*, Oxford e Varsóvia, 1980.

[219] A cristalografia e as considerações respeitantes aos valores estéticos das matemáticas também levaram a aspectos das matemáticas visuais. Um livro que exerceu grande influência foi *The Elements of Dynamic Symmetry* (1926), pelo pintor e ilustrador americano Jay Hambidge (reeditado pela Dover, 1967). Ver também *Symmetry*, de Hermann Weyl (1952), assim como *Aesthetic Measure* (1933, rev. 1961), de G. D. Birkhoff, que já referimos, e, de A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Berlim, 1923; 4.ª ed., Basileia, 1956). Estes livros contêm ilustrações interessantes. Ver atrás a nota 185.

As matemáticas polacas foram seriamente afectadas pela ocupação nazi, de 1939 a 1945. Muitos matemáticos que não fugiram do país foram assassinados. Banach e Steinhaus sobreviveram a este horror, mas Banach apenas por alguns meses.

14

Em Itália, a tradição geométrica era forte, particularmente em geometria algébrica, mantida por A. Brill e Max Noether na Alemanha. Referimo-nos, além de Segre, às publicações e lições de Guido Castelnuovo, Francesco Severi e Federigo Enriques. Muitos dos seus trabalhos podem ser estudados nos livros de Severi, nomeadamente *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, escrito em alemão (1921). Este livro e os estudos posteriores tratam de curvas algébricas e variedades de muitas dimensões, superfícies de Riemann e integrais abelianos. Enriques esteve, tal como Klein, na Alemanha, ligado a questões de educação. Os *Problèmes de la science et la logique* (1909) e a *Storia del pensiero scientifico* (1932, com Giorgio de Santillana, que mais tarde ensinou no MIT) mostram as relações de Enriques com a filosofia da ciência, na qual ocupa uma posição realista, em oposição às correntes das tendências positivístico-idealistas.

Estes homens acabaram por se estabelecer em Roma e atraíram muitos estudantes e visitantes. Não só Volterra, mas também Levi-Civita, residiram aí (Volterra desde 1900, Levi-Civita desde 1918). Trabalhando em muitos campos, além dos tensores, Levi-Civita contribuiu para a mecânica (o problema dos três corpos), a hidrodinâmica (ondas num canal) e a relatividade; tanto Levi-Civita como Cartan eram correspondentes de Einstein, que estava sempre disposto a ajudar os mais jovens.

O fascismo, mais gradualmente do que na Alemanha, também se fez pagar caro em Itália. Tanto Volterra como Levi-Civita perderam os seus lugares no ensino. Outros tiveram de ir para o estrangeiro, tal como o físico Enrico Fermi.

A entrada da Holanda no mundo capitalista moderno fez renascer a arte e a ciência, incluindo a física (J. D. van der Waals e H. A. Lorentz), a astronomia (J. C. Kaptein) e as matemáticas. A *Theory of Electrons*, de Lorentz, data de 1909. Os principais matemáticos eram D. J. Korteweg, em Amesterdão, J. C. Kluyver, em Leida, e P. H. Schoute, em Groninga. As principais contribuições de Korteweg foram para a mecânica e a hidrodinâmica, onde encontramos o «teorema de Korteweg-De Vries»; os artigos de Kluyver integravam-se em geral no espírito de Chasles e Hermite; Schoute, como vimos, contribuiu para o estudo dos polítopos. Korteweg foi o orientador da tese de L. E. J. Brouwer[220] e um editor das *Œuvres* de Huygens. Brouwer também foi influenciado por G. Mannoury, um matemático autodidacta, que introduziu a topologia e os estudos sobre os fundamentos na Holanda e foi o fundador de um tipo de semântica chamado *significa*. A geração mais jovem inclui J. A. Schouten, conhecido através do estudo dos tensores, que atraiu muitos estudantes; entre os seus assistentes encontrava-se D. van Dantzig, que trabalhou em muitos campos, da geometria diferencial projectiva e da topologia até, mais tarde, à estatística matemática[221]. Bartel L. van der Waerden foi graduado pela Universidade de Amesterdão (tese: 1926). Durante o período nazi, Hans Freudhental foi para a Holanda, permanecendo desde 1946 em Utreque.

Na Hungria referimos F. Riesz, em Szeged (depois de 1946 em Budapeste), o qual contribuiu para a análise funcional e para o estudo dos operadores lineares nos espaços de Hilbert (já referimos os teoremas de Riesz-Fischer) e Lipot Féjer, desde 1911

---

[220] A tese de Brouwer, referida na secção 5, estava originalmente tão cheia de «filosofia» que Korteweg recomendou que dela fosse excluída muita coisa. Ver W. P. van Stight, *HM*, vol 6, pp. 385-404.

[221] Ver *Two Decades of Mathematics in the Netherlands*, 1920-40, E. M. J. Bertin, H. J. M. Bos e A. W. Grootendorst, eds. (duas partes; Amesterdão, 1970). Ver também adiante o artigo de Van der Corput na bibliografia.

até à sua morte, em 1959 (com uma pequena interrupção), em Budapeste, o qual realizou a maior parte dos seus trabalhos na análise harmónica. Hans Hahn, em Viena, também era essencialmente um analista e estudou funções reais e espaços abstractos.

Hahn interessava-se pela filosofia da matemática e promoveu a ida de Moritz Schlick para Viena. Em 1922 formou-se à volta de Schlick o chamado Círculo de Viena, constituído por matemáticos e outros cientistas interessados em construir uma visão do mundo baseada na ciência «sem metafísica». A este grupo de «positivistas lógicos» pertenciam os matemáticos Hahn, Gödel (que estudou com Hahn) e Rudolf Carnap. Ludwig Wittgenstein foi particularmente influente. Carnap foi o autor de *Die logische Syntax der Sprache* (1934) e Wittgenstein do *Tractatus logico-philosophicus* (1922), cada um à sua maneira tentando construir um caminho para unir a semântica, a lógica matemática e os fundamentos da investigação científica. O Círculo de Viena teve de se dissolver com o advento do fascismo; vários dos seus membros receberam lugares importantes no estrangeiro. Carnap foi para Chicago, Gödel para Princeton e Wittgenstein para Cambridge, em Inglaterra[222].

Na Escandinávia, encontramos T. A. Skolem na Noruega, T. Carleman em Estocolmo e Harald Bohr (funções quase periódicas) em Copenhaga; na Suíça, Hurwitz e Minkowski em Basileia (Minkowski de 1896 a 1902). Por iniciativa suíça aparece a edição monumental de *Opera omnia* de Euler.

O Japão integrou-se no período moderno das matemáticas durante estes anos. Mencionemos o algebrista Tejii Takagi e os seus alunos (corpos abelianos, relação com o décimo segundo problema de Hilbert). A geometria diferencial e os tensores

---

[222] O idealismo deste tipo de abordagem foi objecto de muitas críticas; ver, por exemplo, M. Cornforth, *Marxism and the Linguistic Philosophy*, Nova Iorque, 1965. Cornforth foi um dos estudantes que se reuniram à volta de Wittgenstein em Cambridge, cerca de 1930.

foram estudados por A. Kawaguchi e por aqueles que influenciou. Também começaram a desenvolver-se novas escolas de matemática na Índia, Canadá e Checoslováquia.

15

As matemáticas americanas alcançaram padrões mundiais através de homens que, por volta de 1880, tinham vindo estudar à Europa, especialmente à Alemanha. Entre eles encontrava-se E. H. Moore, que, como vimos, fundou a sua própria escola em Chicago, bem como William F. Osgood e Maxime Bôcher, ambos durante muitos anos em Harvard (1890-1933 e 1891-1918, respectivamente). O *Lehrbuch der Funktionentheorie*, de Osgood (1907), foi durante muito tempo considerado um texto clássico devido à sua precisão e forma de exposição.

A geração mais nova incluía George D. Birkhoff, em Harvard, e Oswald Veblen, em Princeton (1912-44 e 1905-60, respectivamente), Veblen de 1932 a 1950 no Instituto para Estudos Avançados de Princeton[223], recentemente fundado. Birkhoff, depois do seu êxito, em 1913, com a demonstração do «último teorema» de Poincaré sobre o problema dos três corpos, continuou a trabalhar no espírito da obra de Poincaré, enriquecendo-a com os conceitos de transitividade métrica e, depois de 1931, com os teoremas ergódicos. Tinha vários interesses, incluindo uma sua teoria da gravitação (1944; concordava com Einstein na teoria da relatividade restrita, mas não na geral). Já nos referimos à *Aesthetic Measure* (1933, com mui-

[223] Uma instituição dedicada à investigação pura, mantida particularmente, fundada de acordo com as ideias do professor e educador Abraham Flexner na sua obra crítica *Universities, American, British, German* (1930). Começou com uma Escola de Matemática e entre os seus primeiros elementos encontravam-se Veblen, von Neumann e Marston Morse, assim como Einstein e Weyl e outros cientistas vindos de países dominados pelo nazismo.

tas ilustrações)[224]. O seu filho é Garret Birkhoff, que começou trabalhando em álgebras de Boole (reticulados) nos anos 40.

Veblen começou na axiomática, publicando os seus trabalhos numa obra em dois volumes, *Projective Geometry* (1912, 1918), escrita com John W. Young, começando em 1911, em Dartmouth[225]. A sua *Analysis Situs* (1922) abriu novos caminhos para muitos matemáticos e levou à formação da escola de topologia de Princeton. Dos trabalhos sobre topologia combinatória, a escola passou, com J. W. Alexander e Solomon Lefschetz, para a topologia algébrica e a álgebra homológica (que Lefschtz, mais tarde, introduziu no México). Com J. H. C. Whitehead, Veblen escreveu *The Foundations of Differential Geometry* (1932).

Às matemáticas americanas deste período pertencem os trabalhos de L. E. Dickson, mais velho, com os seus estudos sobre grupos finitos e a impressionante *History of the Theory of Numbers* (1919-23), em 3 volumes; os primeiros trabalhos de John von Neumann, nascido na Hungria e que, depois de ter sido leitor em Gotinga, veio para Princeton em 1930; e os de Norbert Wiener. Pertencem aos trabalhos de von Neumann deste período os de teoria dos grupos e os de espaços de Hilbert, operadores e teoremas ergódicos, com contribuições fundamentais para o quinto problema de Hilbert. Von Neumann também se dedicou às matemáticas da mecânica quântica e da termodinâmica quântica. Wiener, depois de uma primeira incursão na lógica, dedicou-se ao movimento browniano e à análise harmónica generalizada, que envolvia os teoremas tauberianos[226], estudos que

---

224 Sobre este assunto ver a bibliografia de W. L. Schaaf, *Amer. Math. Monthly*, vol. 55, 1951, pp. 157-177.

225 Não confundir o geómetra americano John W. Young (1879-1932) com William H. Young, o analista britânico (1863-1942) referido anteriormente. Também existiu um clérigo britânico, Alfred Young (1873-1940), que, com J. H. Grace, seu colega de estudo em Cambridge, foi o autor de *The Algebra of Invariants* (1903), escrita no espírito de Gordan e Frobenius.

226 Alfred Tauber (1866-1942), em Viena, publicou certas condições integrais num estudo sobre séries (1897), usado por Hardy e Littlewood, dando o nome aos teoremas tauberianos.

levaram à sua formulação da cibernética (1948). De 1919 até à sua morte, em 1964, Wiener ensinou no MIT[227].

Outros matemáticos deste período foram H. Marston Morse, que continuou os trabalhos de Birkhoff sobre topologia e cálculo das variações, e Marshall H. Stone, com os seus estudos sobre operadores lineares nos espaços de Hilbert e álgebras de Boole.

As matemáticas nos EUA receberam um grande impulso através da imigração de europeus eminentes durante o período nazi. Já nos referimos a vários, entre eles Einstein, Weyl e Emmy Noether. Outros ainda são E. Artin, R. Courant, G. Polya, H. Rademacher, V. Hurewicz, O. Neugebauer, André Weil e R. von Mises. Tamarkin, da Brown University, já tinha vindo da Rússia[228].

16

A grande era dos computadores electrónicos só começou depois da segunda guerra mundial; no entanto, os computadores tiveram uma longa e interessante pré-história, que remonta a Wilhelm Schickard, amigo de Kepler (1623-24), Pascal e Leibniz. Em 1808, o tecelão Joseph-Marie Jacquard inventou um método para programar um tear (mecânico) com cartões perfurados. Esta ideia foi desenvolvida por Charles Babbage através da sua «máquina analítica» (1833). (Babbage foi ajudado por Lady Ann Lovelace, filha de Byron.) Esta máquina, que nunca foi acabada[229], continha muitas ideias básicas usadas em qualquer computador automático moderno: podia «acumular», fazer cálculos (movendo círculos serrilhados) e contro-

---

[227] O Massachusetts Institute of Technology, onde a colaboração entre matemáticos, físicos e engenheiros electrotécnicos, típica dos trabalhos de Norbert Wiener e outros, como Vannevar Bush, conduziu aos primeiros trabalhos sobre computadores.

[228] Ver G. Birkhoff, «Some Leaders in American Mathematics», in *The Bicentennial Tribute to American Mathematics, 1776-1976*,ed. de D. Tarwater, Math. Assoc. of Amer., 1977, pp. 25-78.

[229] Foi efectivamente acabada e posta a funcionar por uma equipa de matemáticos e técnicos da Universidade de Cambridge, em 1991. *(N. do T.)*.

lar. Mas, visto que as operações tinham de ser totalmente mecânicas, somente a electrónica actual as pôde tornar práticas.

Entre 1884 e 1890, Herman Hollerith, um estatístico americano que colaborou no recenseamento de 1890, desenvolveu um sistema de mecanismos que operavam sobre cartões perfurados, uma para cada pessoa; cada posição dos furos representava uma condição (profissão, idade, etc.). Em 1934, Konrad Zuse, um alemão, melhorou este sistema, estudando as ideias de Leibniz sobre o uso do sistema binário.

Independentemente disto, Vannevar Bush, no MIT, em colaboração com Norbert Wiener, construiu em 1939 um computador analógico para calcular certos integrais e para resolver alguns tipos de equações diferenciais. Em 1936, em Princeton, Alan M. Turing, um jovem inglês, definiu a «máquina de Turing», um modelo abstracto de uma máquina lógica possível, construída mentalmente para resolver questões tais como o problema da decisão de Hilbert. Mais tarde, depois de 1945, em Manchester, na Inglaterra, Turing desenvolveu as suas ideias para construir computadores práticos. Claude E. Shannon, então no MIT, deu mais alguns passos em desenho lógico de circuitos na sua teoria da informação.

A nova era dos computadores operacionais começou com o Mark I, iniciado em 1937, em Harvard, por Howard H. Aiken, com o apoio da IBM (International Business Machines Corporation). A grande indústria começava a interessar-se. O Mark I tinha todos os benefícios, financeiros e da tecnologia moderna, mas, embora tivesse dispositivos magnéticos, ainda era essencialmente mecânico. Os aperfeiçoamentos surgiram rapidamente; o Mark I (1945-47) realizava todas as operações aritméticas e de transferência através de interruptores electromagnéticos. O primeiro computador electrónico, o ENIAC, foi acabado na Universidade de Pensilvânia, em Filadélfia, em 1946. Tudo isto era ainda trabalho de universidade, mas, nos anos 50, os computadores já foram utilizados com objectivos comerciais: a era dos computadores tinha começado.

Podem ser encontradas exposições sumárias nas já mencionadas obras de C. Boyer, M. Kline, N. Bourbaki e H. Wussing e no apêndice de I. B. Pogrebysskiï à tradução russa desta *História Concisa* (incluído também na tradução alemã). Além disso, ver:

Dubbey, J. M., *Development of Modern Mathematics,* Nova Iorque, 1970.
Freudenthal, H., «The Implicit Philosophy of Mathematics Today», in *Contemporary Philosophy, a Survey,* R. Klibansky, ed. Florença, 1968, pp. 342-368.
Prasad, G., *Mathematical Research in the Last Twenty Years,* Berlim, 1923.
Weyl, H., «A Half Century of Mathematics», in *Amer. Math. Monthly,* vol. 58, 1951, pp. 523-583.

Assuntos especiais, além de bio e bibliografias em *DSB,* dos pequenos resumos no *Lexikon,* de Meschkowski, e das já mencionadas obras de Black, Birkhoff, Kuratowski, Bertin e Young, são tratados nas seguintes obras:

Benacerraf, P., e Putnam, H., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings,* Englewood Cliffs, N. J., 1964. (Ensaios de Carnap, von Neumann, Bernays, Gödel, Wittgenstein e outros.)
Bockstael, P., *Het Intuitionisme bÿ de Franse Wiskundingen,* Verh. Kon. Vlaamse Acad. Wet., 11, 1949, n.º 32.
Bott, R., «Marston Morse and His Mathematical Works», in *Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.),* vol. 3, 1980, pp. 907-950.
Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques (1980-presente). (Muitos ensaios sobre tópicos e autores contemporâneos.)
van Dalen, D., e Monna, A. F., *Sets and Integration. An Outline of the Development,* Groninga, 1973.
Dieudonné, J., *Cours de géométrie algébrique I,* Paris, 1974. (Traça a história deste assunto até 1950.)
—, *History of Functional Analysis.* Amesterdão, 1981.
Felix, L., *The Modern Aspect of Mathematics.*
Goldstine, H. H., *The Computer from Pascal to von Neumann,* Princeton, N. J., 1970.
Grattan-Guiness, I., «On the Development of Logic Between the Two World Wars», in *Amer. Math. Monthly,* vol. 88, 1981, pp. 495-529.
Hawkins, J., *Lebesgue's Theory of Integration,* Madison, Wis., 1970.
Heins, S. J., *John von Neumann and Norbert Wiener,* Cambridge, Mass., 1980.
Le Lionnais, F., *Les grands courants de la pensée mathématique,* Paris, 1948; 2.ª ed. aumentada, 1962. (Uma colecção de ensaios de Borel, Fréchet, Denjoy, Weil e outros.)

Sobre Luzin: *Uspekhi Matem. Nauk*, vols. 6, 1951, 7, 1952, e 8, 1953.
Kennedy, H., *Life and Work of Giuseppe Peano*, Dordrecht e Boston, 1980.
Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work, J. W. Brewer e M. K. Smith, eds., Nova Iorque e Basileia, 1981.
Reid, C., *Hilbert*, Berlim, etc., 1970.
—, *Courant in Göttingen and New York*, Nova Iorque, 1976.
Resnik, M. D., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ítaca e Londres, 1980.
Van der Corput, J. G., «Wiskunde», in *Geestelÿk Nederland 1920-1940*, K. F. Proost e J. Romein, eds., Amesterdão e Antuérpia [1947?], pp. 255-291. Ver também *The Development of Science in the Netherlands During the Last Half Century*, Leida, 1930, pp. 44-51.
Sobre Volterra: *Rendiconti Semin. Mat. e Fis. Milano*, vol. 17, 1946, pp. 6-61.
Weil, A., «L'avenir des mathématiques», *in* Le Lionnais, acima, pp. 307-320.
Sobre N. Wiener: *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, n.° 1, parte II, 1966, 145 pp.

Índice remissivo

APÊNDICE

MATEMÁTICOS PORTUGUESES

POR

JOSÉ JOAQUIM DIONÍSIO

E

AUGUSTO J. FRANCO DE OLIVEIRA

I

De Pedro Nunes ao século XX

PEDRO NUNES

Nasceu em 1502, natural de Alcácer do Sal. Faleceu em Coimbra, aos 76 anos, uma semana após a catástrofe de Alcácer Quibir. Era cristão-novo, mas nem ele nem os filhos foram incomodados pela Inquisição, talvez porque o inquisidor-mor era o cardeal-infante D. Henrique — o futuro rei —, que foi seu discípulo — e dilecto discípulo. Já, porém, dois netos estiveram encarcerados anos a fio, um em Coimbra, o outro em Lisboa! Cursou Medicina na Universidade de Lisboa, não deixando de passar pela de Salamanca. É sabido que a medicina de então não dispensava como auxiliar a astrologia, a qual se apoiava na astronomia, de que a matemática é instrumento fundamental. E assim deve ter despontado o génio matemático de Pedro Nunes. Em 1529 é nomeado cosmógrafo do rei — sendo aliás o mais eminente cosmógrafo do mundo de então e o que pôde escrever terem os navegadores portugueses descoberto «novas ilhas, novos mares, novos povos e, o que mais é, novo céu e novas estrelas». Foi professor da Universidade, primeiro em Lisboa, depois em Coimbra, onde se jubilou aos 60 anos, mas não deixando de continuar a examinar em Lisboa os futuros pilotos, cartógrafos e mestres. Por via das regras de navegação que lhes pretendia ensinar, ou impor, teve desaguisados

com alguns pilotos. Confessa: «Bem sei quam mal sofrem os pilotos que fale na Índia quem nunca esteve nela; e pratique no mar quem nele não entrou.» Todavia, a sua colaboração com o maior dos pilotos portugueses, D. João de Castro, foi exemplaríssima. No *Roteiro de Lisboa a Goa* lê-se como este procurou verificar «se era verdadeira e pontual a regra que nos deu o Doutor Pedro Nunes, pera em toda a hora do dia em que fizer sombra sabermos a levação do polo». Adiante veremos outro caso não menos exemplar.

A produção científica de Pedro Nunes consta de duas partes, que é bom discriminar. Uma constituída por obras traduzidas, mas melhoradas, corrigidas e ampliadas com importantes anotações originais. São três obras todas com primeira edição em 1537, a saber:

Tratado da Esfera, por Sacrobosco;
Teórica do Sol e da Lua, por Purbáquio;
Cosmografia, Livro Primeiro, por Ptolomeu.

Descrevamos agora, muito sumariamente, as principais obras inteiramente originais que saíram impressas:

1) *Tratado sobre Certas Dúvidas da Navegação* (1537)

Tais dúvidas foram as colocadas a Pedro Nunes pelo navegador Martim Afonso de Sousa ao regressar do Brasil, em uma das suas viagens. E têm a ver com a errada identificação, que até àquela época se fazia, entre as linhas que o holandês Snell viria a chamar «ortodrómicas» — isto é, certas geodésicas que no caso da esfera são arcos de círculo máximo — e as «loxodrómicas», por Pedro Nunes chamadas «linhas de rumo» — as que fazem ângulo constante com (ortodrómicas que são) os meridianos. Ora foi Pedro Nunes quem pela primeira vez dilucidou a natureza verdadeira das linhas de rumo. Em primeiro lugar, somente os meridianos, entre as ortodrómicas, e os

paralelos são linhas de rumo (ângulos constantes de 0° e 90°, respectivamente). Quanto às restantes linhas de rumo, descobriu Pedro Nunes que espiralam, em cada hemisfério, em



PEDRO NUNES

torno do respectivo pólo, aproximando-se ilimitadamente deste sem nunca o atingir. A análise matemática rigorosa destas linhas, bem como da projecção de Mercator (descoberta empiricamente em 1569), coube a Edmund Halley, colaborador de Newton.

2) *Tratado em Defensão da Carta de Marear* (1537)

É desta obra a segunda citação que acima fizemos de Pedro Nunes.

As obras 1) e 2) foram vertidas em latim e bastante desenvolvidas para constituírem uma obra pela primeira vez editada em 1566 e pela segunda em 1573, recebendo então o título por

que ficou sendo conhecido o mais importante tratado de navegação impresso até esta data:

3) *De arte adque ratione navigandi* (1566 e 1573)
4) *De Crepusculis* (1542)

Dá o autor nesta obra a razão científica da variabilidade do crepúsculo, quer matutino, quer vespertino, em função do lugar e da posição do Sol; e calcula o crepúsculo mínimo para cada lugar.

Totalmente original, esta investigação bastaria a imortalizar o autor.

Na mesma obra tem sua origem a teoria do instrumento posteriormente designado por «nónio» (de Nunes) ou «vernier» (de Vernier), destinado a medir fracções da menor divisão na leitura de réguas ou círculos graduados.

5) *De erratis Orontii Finei* (1546)

Um professor do futuro Colégio de França publicara em 1544 uma pretensa solução dos problemas clássicos, levantados pelos matemáticos gregos, da quadratura do círculo, da trissecção do ângulo e da publicação do cubo. Imediatamente (de 44 a 46, note-se), Pedro Nunes demonstra a falsidade de tal solução. Na verdade, só em 1837 resolveu Wantzel o segundo e o terceiro problemas, aliás pela negativa; enquanto o primeiro havia de esperar pelo ano de 1882, quando Lindemann o resolveu — igualmente pela negativa.

6) *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (1567)

Vale a pena transcrever da dedicatória ao cardeal D. Henrique: «Esta obra há perto de XXX anos que foi por mi composta, mas porque depois fui ocupado em estudo de coisas mui diferentes, e de mera especulação, posto que algumas vezes a

revisse, e conferisse com o que outros depois escreveram, a deixei de publicar até agora, que debaixo do nome e tutela de V. A. a mando fora.»

Defende a seguir a transladação em castelhano pelo fim de ampliar a difusão da obra.

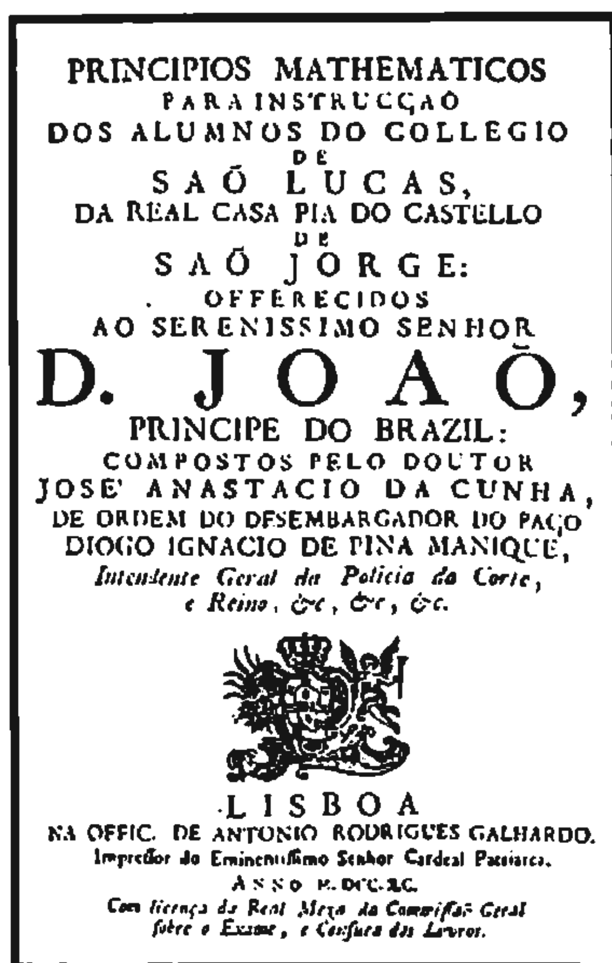
Podemos asseverar que no quase meio século decorrido entre a *Ars Magna* (1545), de Cardano, e a *Artem Analyticam Isagoge* (1591), de Viète, nenhum outro tratado ascendeu ao alto nível deste de Pedro Nunes. Por outras palavras, entre a resolução das equações dos 3.° e 4.° graus pelos algebristas italianos e a profunda renovação que a álgebra sofreu com a invenção do cálculo literal graças ao génio de Viète.

JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA

José Anastácio da Cunha (1744-87) nasceu em Lisboa e estudou preparatórios com os padres oratorianos, às Necessidades, como mais tarde outro grande português, Alexandre Herculano (1810-77). Foi tenente de artilharia no forte de Valença do Minho, onde conviveu com oficiais ingleses. Em 1769 redigiu a *Carta Físico-Matemática sobre a Teoria da Pólvora em Geral e a Determinação do melhor Comprimento das Peças em Particular,* que o alçapremou à categoria do maior especialista de balística na Europa de então. Daí o nomeá-lo o marquês de Pombal, em 1773, lente de Geometria na Universidade de Coimbra, com o grau de Doutor. Aí foi colega de Monteiro da Rocha, outro matemático de valor e um dos autores do estatuto pombalino da Universidade.

Cinco anos depois, já destituído o marquês, foi ele também destituído, de lente e de oficial, ao cair sob a alçada da Inquisição por causa do seu inconformismo religioso — bem patente na poesia proto-romântica que igualmente cultivou. Compareceu no auto-de-fé, que teve lugar em Lisboa, a 11 de Outubro de 1778.

Ao intendente-geral Pina Manique deveu um lugar de professor no Colégio de S. Lucas, da Real Casa Pia do Castelo



PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAÕ
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSE' ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
Intendente Geral da Policia da Corte,
e Reino, &c, &c, &c.

LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO.
Impressor do Eminentissimo Senhor Cardeal Patriarca.
ANNO M.DCC.XC.
Com licença da Real Meza da Commissaõ Geral
sobre o Exame, e Censura dos Livros.

FRONTISPÍCIO DOS *PRINCIPIOS MATHEMATICOS*

de S. Jorge. Isso lhe permitiu continuar a composição dos seus *Principios Mathematicos* (para instrução dos alunos daquele colégio), os quais, todavia, só vieram a lume em 1790, «de ordem» daquele intendente.

É uma exposição condensada da matemática do tempo, ao longo de 316 páginas (acrescidas de um atlas), com forte preocupação de economia e rigor, que, num ou noutro ponto, leva o autor a antecipar-se aos matemáticos da época. Assim, define a convergência de uma série pela condição que mais tarde viria a ser redescoberta por Fourier (1811) e por Cauchy (1821). Além disso, usa séries convergentes para definir não só números reais, como também funções, por exemplo, a função exponen-

cial — ponto este cuja originalidade e importância foram sublinhadas por Gauss em carta de 1811 a Bessel.

Com efeito, Gauss conheceu a tradução francesa daquele livro, nesse mesmo ano publicada em Bordéus por um amigo e discípulo do autor, João Manuel de Abreu. Também o inglês Playfair conheceu a tradução (não isenta de deficiência) e dela publicou uma recensão.

Terceira obra de matemática se deve a Anastácio da Cunha: a que saiu impressa em Londres, em 1807, por iniciativa do possuidor do manuscrito autógrafo, um notável, e porventura inacabado, *Ensaio sobre Princípios de Mecânica*.

DANIEL AUGUSTO DA SILVA

Daniel Augusto da Silva (1814-78) nasceu em Lisboa e formou-se em Matemática na Universidade de Coimbra, em 1839, dois anos após a renovação dos estudos científicos superiores pelo governo de Passos Manuel, renovação que incluiu a criação da Escola Politécnica de Lisboa e da Academia Politécnica do Porto. Também oficial de marinha, foi Daniel da Silva nomeado lente da Escola Naval. É o autor de duas extensas e notabilíssimas investigações que publicou nas *Memórias da Academia Real das Ciências*. A primeira, saída a lume em 1851, intitula-se *Sobre a Rotação das Forças em torno dos Pontos de Aplicação* (171 páginas) e inclui resultados que foram redescobertos por Gastão Darboux decorrido que foi mais de um quarto de século! A segunda memória, sob a epígrafe *Propriedades Gerais e Resolução Directa das Congruências Binómias,* veio a público em 1854 e, apesar de abranger um total de 163 páginas, ficou incompleta por motivo de grave doença que prostrou o autor. Alguns dos resultados originais nela contidos vêm assinalados por L. E. Dickson na sua conhecida *History of Theory of Numbers* (1919). E há a acrescentar que outras conclusões a que chegou Daniel da Silva andam atri-

buídas ao matemático irlandês H. J. Smith, que as obteve nove anos depois...



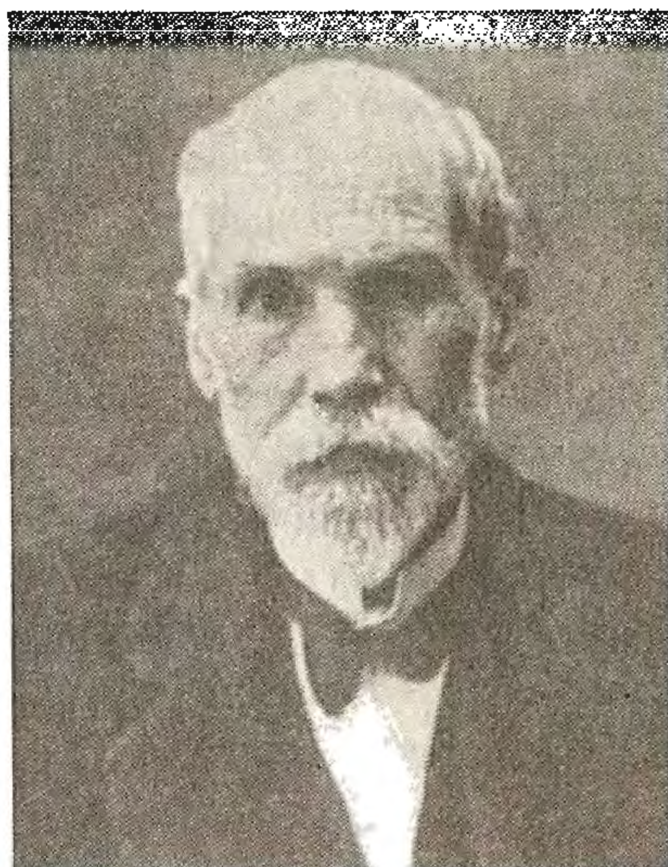
DANIEL AUGUSTO DA SILVA

Enfraquecido pela doença, pôde ainda Daniel da Silva dedicar-se a outras investigações, das quais é justo fazer sobressair as demográficas e actuariais, com vista a uma correcta estruturação no funcionamento dos montepios nacionais; assim como as *Considerações e Experiências acerca da Chama* (1873).

FRANCISCO GOMES TEIXEIRA

Francisco Gomes Teixeira (1851-1933) nasceu em S. Cosmado, no distrito de Viseu. Sendo necessário tirar à sorte se estudaria Teologia ou Matemática, a sorte decidiu pela Mate-

mática: doutorou-se, com 20 valores, no próprio ano em que se formou, na Universidade de Coimbra. Considerou-se sempre discípulo intelectual de Daniel da Silva. Professor em Coimbra de 1880 a 1883, foi neste último ano nomeado para a Academia Politécnica do Porto. É autor de mais de 140 trabalhos de investigação em análise matemática, publicados em destacadas revistas, como, a título de exemplo, o *Jornal de Crelle,*



FRANCISCO GOMES TEIXEIRA

o Jornal de Liouville, a *Acta Mathematica e* também *o Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas,* que ele próprio fundou em 1877 e durou até 1905 (15 volumes), seguindo-se-lhe *os Anais Científicos da Academia Politécnica do Porto.* Gomes Teixeira correspondeu-se com notáveis matemáticos do seu tempo: Hermite, Appell, La Vallée Poussin, Mittag Leffler, Levi-Civita, Forsyth, Peano, Weyr, Pierpont e outros.

Uma portaria do Governo, de 1902, determinou que fossem coligidas e publicadas pela Imprensa da Universidade de Coimbra as *Obras sobre Matemática,* de Gomes Teixeira. Dois dos sete volumes editados (II e VI) incluem o modelar «Curso de Análise Infinitesimal», por largos anos utilizado pelos estudantes portugueses (Cálculo Diferencial, 1887; Cálculo Integral, duas partes, 1889 e 1892) e muito apreciado, por exemplo, por Pierpont e Weyr.

Três outros dos volumes das *Obras sobre Matemática* (IV, V e VII) abrangem o *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches,* tradução e ampliação do original espanhol, coroado por um prémio de concurso aberto pela Academia Real das Ciências de Madrid. Obra notabilíssima, «grande serviço prestado à ciência» (P. Appell, 1917), foi reeditada em 1972 nos EUA, pela editora Chelsea.

Em Abril de 1932, já com 81 anos, proferiu Gomes Teixeira, na Academia das Ciências, uma série de lições sobre a «História das Matemáticas em Portugal», que a mesma Academia editou em volume dois anos depois. É interessante esta declaração do autor, feita anos antes: «Nunca deixei, em qualquer estudo matemático, de traçar a história da questão nele versada.»

II

Sobre o movimento matemático nos anos 40

EXÓRDIO

Fazemos agora uma breve pausa nas notícias biográficas de matemáticos portugueses para nos referirmos ao movimento matemático nos anos 40 do presente século em Portugal e a alguns dos seus mentores. Tarefa assaz delicada, pois temos de colher alguns frutos (de uma árvore abundante) que o tempo ainda não amadureceu e perturba-nos a emoção de recordações de vivências e de presenças ainda vivas no nosso quotidiano.

A chamada «geração científica de 40» compreende um grande número de matemáticos e outros cientistas, que, num curto período desde meados dos anos 30 até meados dos anos 40, animaram a vida cultural e científica deste secular ermo de pasmaceira. Jovens doutorados e investigadores plenos de energia criadora, visão larga e generosidade organizaram seminários e conferências de actualização científica, publicaram livros, brochuras, folhetos e artigos de divulgação das novas teorias e dos seus resultados, traduziram obras universais, aliciaram outros jovens para a investigação, promoveram contactos e intercâmbio com cientistas estrangeiros, fundaram revistas

científicas, colecções monográficas, criaram clubes, centros de estudos avançados, sociedades científicas, bibliotecas. Em vagas sucessivas, começando em 1935, foram vítimas da perseguição movida pela regimental ditadura de Salazar — a prisão, o afastamento, o exílio forçado: Abel Salazar, Aurélio Quintanilha, Rodrigues Lapa, Bento de Jesus Caraça, Azevedo Gomes, Pulido Valente, Fernando da Fonseca, Ferreira de Macedo, Rémy Freire, Morbey Rodrigues, Peres de Carvalho, Dias Amado, Zaluar Nunes, José Morgado, Mário Silva, Manuel Valadares, Marques da Silva, Flávio Resende, Torre de Assunção, Celestino da Costa, António Monteiro, Hugo Ribeiro, Alfredo Pereira Gomes, José Gaspar Teixeira, Ruy Luís Gomes, entre outros... Os que ficaram, com raras excepções, não quebraram o atavismo das gerações que se seguiram, mas guardaram intacta a herança e o exemplo que gerações mais recentes retomaram.

Escolhemos escrever (apenas) sobre algumas das personalidades que se destacaram, de maneiras diferentes, no movimento de renovação (verdadeira Renascença) do ensino e investigação matemática em Portugal no período em questão, lançando as bases de desenvolvimentos que perduram até ao presente e se projectam no futuro. A ordem é cronológica, pela data de nascimento. Esta ordem revela, implicitamente, um aspecto das personalidades retratadas apenas reconhecível por aqueles que as conheceram como alunos ou colegas de ofício. Trata-se da «atitude na sala de aula», no sentido progressivo de uma maior abertura e sensibilidade a questões de índole pedagógica. A este respeito não podemos deixar de mencionar a acção cultural, no mais vasto sentido, de Bento de Jesus Caraça (1901-48), discípulo de Mira Fernandes e professor no Instituto de Ciências Económicas e Financeiras. Através de inúmeras conferências e escritos (nas revistas *Técnica, Seara Nova, Vértice, Gazeta de Matemática* e em jornais e semanários diversos), nos cursos que regeu e publicou *(Lições de Álgebra e Análise, Cálculo Vectorial)* e no incomparável *Conceitos Funda-*

mentais da Matemática, contribuiu, talvez mais do que qualquer outro, nos anos 30 e 40, para divulgar a ideia da inteligibilidade da matemática e da relação desta com os contextos sociais e culturais em que se desenvolve. Sebastião e Silva referiu-se, mais de uma vez, ao contributo de Bento Caraça para a sua formação científica e humanista.

AURELIANO DE MIRA FERNANDES

Nasceu em Mértola (1884) e faleceu em Lisboa (1958). Estudou na Universidade de Coimbra e aí se doutorou (1911) com uma dissertação sobre a teoria de Galois, que mereceu 20 valores. É interessante notar que, como estudante na cadeira de Cálculo, teve como professor o que viria a ser o presidente da República assassinado em 1918, Sidónio Paes; e que, por livro de texto, usou o *Curso de Análise Infinitesimal*, de Francisco Gomes Teixeira. Naquele mesmo ano de 1911, do doutoramento, foi nomeado professor catedrático da Universidade Técnica de Lisboa, na qual ensinou até se jubilar, em 1954. Foi eleito sócio efectivo da Academia das Ciências de Lisboa, na sucessão de Gomes Teixeira. Mira Fernandes não redigiu qualquer tratado ou curso propriamente dito. Com modéstia e singeleza, de si próprio escreveu: «A minha obra pequenina e dispersa, de minguados méritos, é, como sabe, toda de coisas novas ao tempo em que foram escritas, nunca me seduziu escrever um tratado ou sequer um livro de curso. Aquilo que fica de nós, se alguma coisa fica, é o que traz novidade».

Contudo, deixou Mira Fernandes uma bibliografia constante de 97 entradas!

As mais importantes das suas investigações centraram-se na geometria diferencial, e não foi outra a razão por que desde cedo manteve correspondência com Levi-Civita, que apresen-



AURELIANO DE MIRA FERNANDES

tou à Academia dei Lincei 17 das suas memórias sobre aquela matéria. Destacaremos delas:

Transports isoclines et directions associées (1928);
Sulla teoria unitaria dello spazio fisico (1932 e 1933);
La teoria unitaria dello spazio fisico e le equazioni relativiste della mecanica atomica (1934);
Derivazione tensoriale composta negli spazi non pontuali (1935);
Equazioni di struttura dei grupi di Lie (1938).

Na sequência da penúltima memória *(Derivazione...)* destaquemos uma outra saída a lume em 1940 na *Portugaliæ Mathematica* sob a epígrafe «Assiomatica degli spazi di elemento

lineari». Ambos os trabalhos melhoram resultados de Élie Cartan.

Mencionemos ainda dois trabalhos publicados naquela mesma revista portuguesa: «Connessione finiti» (1945), e «Transporti finiti» (1950), os quais se integram na teoria dos campos de bivectores criada por Einstein em sua persistente busca de um campo unitário para as forças naturais, a gravitacional e a electromagnética (a que só mais tarde se juntaram as forças nucleares, a forte e a fraca).

Desde 1950 até 1957, ano que precedeu o do óbito, publicou Mira Fernandes 11 trabalhos de investigação na *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* (2.ª série, A).

Das *Obras Completas de Aureliano de Mira Fernandes,* previstas para três volumes pelo Prof. Vicente Gonçalves, apenas, até esta data, saiu a lume o volume I (Lisboa, 1971), o que contém os «Ensaios, elogios e orações», no total de XXXII + 394 páginas, incluindo um magistral estudo daquele professor: «Aureliano de Mira Fernandes, investigador e cientista.»

JOSÉ VICENTE GONÇALVES

José Vicente Gonçalves (1886-1985) nasceu no Funchal e formou-se em Matemática na Universidade de Coimbra, na qual logo ingressou como assistente e se doutorou com a dissertação *Sobre Quatro Proposições Fundamentais da Teoria das Funções Inteiras* (1921). Professor desde 1927, transferiu-se em 1942 à Universidade de Lisboa e aí se manteve até à jubilação. Espírito profundo, o seu labor é testemunhado por cerca de 80 artigos originais de análise matemática; por alguns lúcidos estudos dedicados a personalidades matemáticas nacionais, como Pedro Nunes, Anastácio da Cunha e Mira Fernandes; por cinco compêndios de matemática elementar; por um curso, *Lições de Cálculo e Geometria* (Coimbra, 1930); e, finalmente,



JOSÉ VICENTE GONÇALVES

pelo *Curso de Álgebra Superior* (1.ª edição, 1 volume, Coimbra, 1933), de cujas 2.ª e 3.ª edições (de 1945 e 1953, respectivamente e ambas em Lisboa) há a destacar o primeiro volume, subintitulado *Elementos Gerais de Análise Real* — um monumento imperecível da matemática portuguesa.

Vicente Gonçalves fundou em 1950 a *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* (2.ª série, A — *Ciências Matemáticas*), da qual saíram, até à sua extinção, em 1974, 15 volumes. Ao longo destes se encontra variada colaboração de matemáticos portugueses de valor, como Mira Fernandes, Sebastião e Silva, Ruy Luís Gomes e António Almeida Costa.

ANTÓNIO ALMEIDA COSTA

Nasceu em Celorico da Beira, a 25 de Maio de 1903. Iniciou os estudos universitários em Lisboa, em 1919, e terminou-os

na Faculdade de Ciências do Porto em 1924, onde se tornou assistente do 2.º grupo de disciplinas. Os seus primeiros trabalhos versam sobre cálculo vectorial e sistemas de equações às derivadas parciais de importância em física-matemática e mecânica celeste. Em 1932 defende a dissertação *Sobre a Dinâmica dos Sistemas Holónomos*. Em 1934 regressa a Lisboa. Em 1937



ANTÓNIO ALMEIDA COSTA

parte para Berlim como o intuito de estudar Física Teórica, sendo aconselhado pelo Prof. Von Laue a estudar Grupos e Representações. Data desta época, muito provavelmente, o interesse de Almeida Costa pela álgebra, que haveria de cultivar durante quatro décadas. De regresso ao Porto, colabora com o Centro de Estudos de Matemática, fazendo cursos e conferências e publicando sobre as modernas teorias algébricas, que, em Portugal, não tinham tido cultores sistemáticos. Catedrático em 1950, vem para a Faculdade de Ciências de Lisboa em

1952 e aqui desenvolve mais amplamente a divulgação e a investigação da Álgebra Moderna, rodeando-se de jovens investigadores e fundando a primeira escola de algebristas portugueses. Dessa escola destacaram-se J. Tiago de Oliveira (que mais tarde se dedica à Estatística), Maria Luísa Noronha Galvão e Margarita Ramalho, entre outros. Colaborou regularmente na *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* desde a sua fundação, por J. Vicente Gonçalves, em 1951. A partir dos anos 60 dedicou-se à redacção de um tratado sistemático de Álgebra, o *Cours d'Algèbre Générale,* em três volumes (I-1964, II-1968, III-1974), publicado pela Fundação Calouste Gulbenkian. O último volume contém, nomeadamente, os resultados da «Escola de Álgebra» de Lisboa, que criou e incentivou dedicadamente até falecer, em 1978. Esta escola prossegue com grande fôlego, nos nossos dias, no Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa.

RUY LUÍS GOMES

Nasceu no Porto (1905) e faleceu nesta cidade, em 1984. Na Universidade de Coimbra licenciou-se em Ciências Matemáticas com 20 valores; e doutorou-se, em 1928, com a dissertação *Desvio das Trajectórias de Um Sistema Holónomo*. Foi professor catedrático da Faculdade de Ciências do Porto desde 1933 até 1947, regendo a cadeira de Física Matemática. Cofundou o Observatório Astronómico da Universidade do Porto, o Centro de Estudos Matemáticos do Porto, a Junta de Investigação Matemática, a Sociedade Portuguesa de Matemática, assim como as revistas *Portugaliæ Mathematica* e *Gazeta de Matemática*. Naquele ano de 1947 foi demitido pela ditadura vigente, não obstante a elevada craveira científica já atingida, bem testemunhada por cientistas como Levi-Civita e Louis de Broglie. Exilado, foi professor de universidades da América do Sul, onde continuou o seu labor científico.



RUY LUÍS GOMES

Os seus trabalhos de investigação repartem-se claramente por dois campos:

a) Mecânica e física matemática;
b) Análise matemática.

Em *a*) contam-se, a começar na dissertação de doutoramento, cerca de trinta trabalhos, muitos dos quais publicados pela Academia dei Lincei nos seus *Rendiconti,* sob a égide de Levi-Civita. Cultivou, em particular, a relatividade, quer a restrita, quer a geral, sendo mesmo autor de dois livros de perscrutante originalidade:

Teoria da Relatividade Restrita (1938);
A Teoria da Relatividade — Espaço, Tempo, Gravitação (1954).

Em certos artigos abordou a questão da rigidez em relatividade.

Foi Ruy Luís Gomes notável expositor científico, quer oral, quer através da escrita. Assim, ficou notável a conferência que pronunciou em 1945, na Faculdade de Ciências de Lisboa, intitulada «Teoria da medida e mecânica quântica», largamente inspirada nos célebres *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* da autoria de Johann von Neumann (1932). E ao nível da simples divulgação científica há que citar o opúsculo *A Relatividade — Origem, Evolução e Tendências Actuais* (1943), especialmente redigido com o fim de rebater asserções menos felizes, sobre relatividade, do almirante Gago Coutinho, publicadas na revista *Seara Nova.*

A Ruy Luís Gomes preocupou-o sempre a possibilidade de se elaborar uma visão filosófica adequada da ciência. Vemo-lo atraído pelo neopositivismo, ou empirismo lógico, da famosa escola de Viena, de Reichenbach, Franck, Carnap, Schick, von Mises e outros. A tal respeito é de sumo interesse a «Introdução» ao primeiro dos livros atrás mencionados.

Passando agora a *b*), também são cerca de trinta os trabalhos incidentes sobre capítulos de análise matemática. Destacamos em particular:

Integral de Riemann (1949).

Esta obra foi depreciada pelo matemático francês Jean Dieudonné, na base de razões improcedentes: é que o autor procurou perscrutar os mais longínquos horizontes que o integral de Riemann pode alcançar:

Integral de Riemann-Stieltjes (1952);
Sobre as Relações entre Integral de Riemann e Integral de Lebesgue (1953).

Esta última monografia mereceu um prémio da Academia das Ciências de Lisboa (Prémio Artur Malheiros).

Finalmente, realçaremos uma interessante exposição da teoria das distribuições de L. Schwartz, vista à sua maneira original: «A função de Dirac, sua interpretação matemática», in *Gazeta de Matemática*, n.os 46-48, 1950-51.

ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO

Nascido em Angola, em 1907, concluiu a licenciatura em Ciências Matemáticas, na Faculdade de Ciências de Lisboa, em 1930 e, como bolseiro da Junta de Educação Nacional (futuro Instituto para a Alta Cultura), doutorou-se na Universidade de Paris em 1936, com uma tese intitulada *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm,* realizada sob a orientação de Maurice Fréchet. Regressado a Portugal, funda (com Manuel Valadares, Marques da Silva, António da Silveira, Peres de Carvalho e outros) o Núcleo de Matemática, Física e Química, que promoveu vários cursos, conferências e publicações. No ano seguinte, com a cooperação de Hugo Ribeiro, Silva Paulo e Zaluar Nunes, funda a revista *Portugaliæ Mathematica,* em cujo primeiro volume (1937) publica a sua tese de doutoramento. Em 1939 cria o Seminário de Análise Geral, que começa por funcionar numa sala da Faculdade de Ciências de Lisboa e depois no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, dirigido pelo Prof. Pedro José da Cunha, para «iniciar um grupo de jovens no estudo das matemáticas modernas», grupo esse de que se hão-de destacar Hugo Ribeiro e Sebastião e Silva. Com outros matemáticos, funda em 1940 a Sociedade Portuguesa de Matemática, da qual é eleito primeiro secretário-geral, e, no mesmo ano (com Bento Caraça, J. da Silva Paulo, Hugo Ribeiro e Manuel Zaluar Nunes), a revista *Gazeta de Matemática,* que pretendia ser «um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das escolas superiores portuguesas...».

Estas e outras actividades de António Monteiro tiveram grande eco na Faculdade de Ciências do Porto, em finais dos

anos 30, que, por iniciativa de Ruy Luís Gomes, convida António Monteiro para uma série de conferências e lições sobre temas actuais de matemática e outros contactos, de que vem a resultar a criação do Centro de Estudos Matemáticos do Porto (1941) e a Junta de Investigação Matemática (1943), para os quais António Monteiro dá uma colaboração decisiva. Das iniciativas desenvolvidas por António Monteiro durante a sua estada no Porto resultaram os «Cadernos de Análise Geral» («Cadernos de introdução ao estudo das modernas correntes do pensamento matemático, publicados pela Junta de Investigação Matemática»), compreendendo cerca de vinte monografias baseadas em cursos, colóquios e lições realizados em domínios fundamentais, como *Álgebra Moderna* (dirigido por A. Almeida Costa), *Topologia Geral* (António Monteiro), *Teoria da Medida e Integração* (Ruy Luís Gomes), *Geometria das Distâncias* (Aureliano de Mira Fernandes) e *Teoria das Estruturas e Problemas dos Fundamentos* (Hugo Ribeiro).



ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO

Em todo este tempo (1938-43), António Monteiro vive de lições particulares, de um trabalho remunerado no Serviço de Inventariação da Bibliografia Científica, criado pelo Instituto para a Alta Cultura, e de uma dotação aquando da sua estada no Porto. A universidade portuguesa fechava-lhe as portas, enquanto a Universidade de Filosofia do Brasil (Rio de Janeiro) o convidava para a cátedra de Análise Superior, sob recomendação de A. Einstein, J. von Neumann e Guido Beck. Em 1945 parte para o Brasil e uns anos mais tarde instala-se na Argentina. A sua acção nestes países é relatada no vol. 39 (1980) da *Portugaliæ Mathematica,* que lhe é dedicado, e aí publica o seu último trabalho, a memória *Sur les Algèbres de Heyting Symétriques*, premiada em 1978 pela Fundação Calouste Gulbenkian e redigida durante a sua única estada em Portugal (1977-79) depois do exílio.

A obra científica de António Monteiro compreende mais de 50 trabalhos de investigação, na maioria versando sobre álgebras de lógicas não clássicas, assunto este em que foi um dos pioneiros e lhe granjeou reputação internacional e muitos discípulos. A sua produtividade, até ao fim da vida, é um dos raros casos no panorama matemático. Em carta a Pereira Gomes (31 de Maio de 1979) escreve: «Comecei de novo a levantar-me às 4 ou 5 da manhã para trabalhar. São tão lindos os temas sobre os quais estou trabalhando...» Faleceu em Bahia Blanca, na Argentina, em 29 de Outubro de 1980.

HUGO RIBEIRO

Hugo Baptista Ribeiro nasceu em Lisboa, a 16 de Maio de 1910. Concluiu a licenciatura em Ciências Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa, em 1939, interrompendo por diversas vezes o curso para se dedicar a actividades de associativismo estudantil e para ganhar a vida dando lições em escolas particulares. Colaborou logo de início com António

Monteiro no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, dando conferências sobre assuntos de topologia, lógica, fundamentos do cálculo das probabilidades e da geometria, e participando activamente no lançamento das revistas *Portugaliae Mathematica* e *Gazeta de Matemática*, para as quais escreve artigos de investigação e de divulgação matemática, colaborando ainda nas secções de «Antologia», «Boletim bibliográfico», «Pedagogia» e «Movimento matemático». Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura na Escola Politécnica Federal de Zurique de 1942 a 1946, escola de grandes tradições, por onde passaram R. Dedekind, F. Klein, Van der Waerden e Paul Bernays, aí conclui o doutoramento em 1946, defendendo a tese *Lattices des groupes abéliens finis*, que é argumentada por P. Bernays e H. Hopf. Durante a sua permanência em Zurique continuou colaborando com as revistas científicas portuguesas e, com sua esposa, Maria do Pilar Ribeiro, ia noticiando o movimento matemático de ideias e os modernos *curricula* dos cursos de Matemática suíços, promovendo na *Gazeta de Matemática* uma campanha a favor da reforma dos estudos matemáticos em Portugal. Para aquilatar da importância desta campanha para os futuros *curricula* de Matemática deve ter-se em conta que, no início dos anos 40, a Matemática ainda era estudada em Portugal quase exclusivamente em função da sua utilidade para algumas aplicações a outras ciências, e muito raramente era encarada como actividade gratificante em si mesma.

Regressado a Portugal (onde o seu doutoramento nunca foi reconhecido oficialmente), é eleito em 1947 para secretário-geral da Sociedade Portuguesa de Matemática e Maria do Pilar Ribeiro para primeiro-secretário. Do plano de trabalhos proposto constavam duas traduções: a da *Álgebra Moderna* (2.ª edição alemã), de Van der Waerden, e os *Fundamentos da Geometria* (10.ª edição alemã), duas obras fundamentais do pensamento matemático contemporâneo. Da primeira encarrega-se Hugo Ribeiro (só o volume I foi traduzido e publi-

cado em fascículos pela SPM, 1947-55) e da segunda Maria do Pilar Ribeiro e José da Silva Paulo (excluindo, infelizmente para os estudiosos de questões de fundamentos, os apêndices), publicada pelo IAC em 1952. Das modernas teorias, lógicas, topológicas e a analíticas, da teoria da medida e integração, da física-matemática, etc., se vinham ocupando Ruy Luís



HUGO RIBEIRO

Gomes e colaboradores no Porto e António Monteiro e colaboradores em Lisboa.

Mas 1947 é o ano da grande ofensiva do regime contra os cientistas e docentes universitários. Hugo Ribeiro, para poder continuar a fazer matemática, aceita uma posição na Universidade de Berkeley. Transita depois pela Universidade de Nebraska, progredindo na carreira académica e formando gerações de jovens investigadores, e finalmente instala-se na Universidade da Pensilvânia, continuando a colaborar em revistas nacionais e estrangeiras, sobretudo em questões de lógica matemática. Após o 25 de Abril de 1974, já aposentados como professores nos Estados Unidos, Hugo Ribeiro e Maria do Pilar regressam a Portugal e oferecem os seus serviços à Universi-

dade do Porto. Aí reencontraram fiéis amizades que o tempo não esmorece e continuaram a sua acção científica e pedagógica durante mais quatro anos, formando e apoiando jovens investigadores. Hugo Ribeiro faleceu em 1988. No ano seguinte realizou-se em Lisboa, em sua homenagem, um Colóquio Internacional de Lógica Matemática.

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Nasceu em Mértola (1914) e faleceu em Lisboa (1972). Licenciado em Ciências Matemáticas (1937) e investigador nato, ainda antes de partir como bolseiro para Roma, em 1943, publicou sete trabalhos de investigação, entre os quais se destaca «Sur une méthode d'approximation semblable à celle de Gräffe», que o Prof. V. Gonçalves resumiu em um parágrafo — «Método de Silva» — no segundo volume do seu *Curso de Álgebra Superior* (2.ª ed.). Em Roma especializou-se em análise funcional. Doutorou-se na Universidade de Lisboa em 1949 com uma inovadora dissertação: *As Funções Analíticas e a Análise Funcional*. É o mais internacionalmente conhecido dos matemáticos portugueses do presente século. Quarenta e sete trabalhos de investigação foram reunidos em três volumes de *Obras de José Sebastião e Silva* [1] (INIC, 1985). Mas há ainda a contar com quarenta outros artigos, cursos e livros de pedagogia e divulgação da matemática.

Em 1954 publica na *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* (2.ª série, A) um trabalho célebre: «Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions», na sequência das fundamentais investigações de S. L. Sobolev e L. Schwartz.

[1] O item n.º 7 referenciado na bibliografia inserta no vol. I das *Obras* deve ser corrigido para «A noção de grupo de Galois e a condição suficiente resolubilidade por meio de radicais», in *Actas do XVII congresso Luso-Espanhol*, t. II, 1.ª secção, Porto, 1943, pp. 117-120. *(AJFO)*

Três dos últimos trabalhos que nos legou incluem-se no domínio da física matemática mais avançada dos nossos dias:

Sobre a Equação da Difusão de Neutrões (1966);
La Théorie des Ultradistributions et les Séries de Multipôles des physiciens (1967);
Sur l'intervention du Calcul Symbolique et des Distributions dans l'étude de l'Équation de Boltzmann.

Este último trabalho ficou incompleto. Registamos também os trabalhos relativos à integração de distribuições, à convolução e às transformações de Fourier, de Laplace e de Stieltjes.



JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Por fim, não é possível deixar de salientar um importantíssimo facto na história da ciência em Portugal: pela primeira vez, um matemático altamente criador funda uma escola de

investigação na sua especialidade. Indiquemos a primeira e a última em data das teses de doutoramento produzidas nesta escola: *Teoria Directa das Distribuições sobre Uma Variedade* (Santos Guerreiro, 1961) e *Produtos Distribucionais Multiplicativos* (Orlando Sarrico, 1987).

Compare-se com o caso de Pedro Nunes: em catorze anos de magistério não tem sequer um discípulo que decentemente o substitua (Prof. V. Gonçalves).

Nota Final

A história da matemática em Portugal, entendida como história da investigação matemática no nosso país, é uma parte da história da ciência em Portugal, a qual, por seu turno, claramente se integra na história da cultura portuguesa, ao mesmo título que a história da nossa literatura, da nossa música, da nossa pintura, etc. Ora uma análise global revela uma surpreendente característica na história da investigação matemática portuguesa: a sua *descontinuidade*. Em que consiste esta descontinuidade? Em que, ao longo de perto de oito séculos, unicamente se nos depara a investigação realizada por uma ou outra personalidade, como que por acaso interessada em matemática. Nós seleccionámos algumas dessas personalidades, na média de pouco mais de uma por século! Na verdade, nunca se vê o germinar de uma escola de investigadores nem o erigir de uma faculdade prestigiada pela excelência do seu ensino matemático. A denominada «escola de Sagres» não passa de um mito e é preciso entrarmos na segunda metade do presente século para assistirmos ao eclodir da escola de Sebastião e Silva, conforme tivemos ensejo de assinalar.

Desde há muito, diversos analistas (por exemplo, António Sérgio, Antunes Serra e o espanhol Ramón y Cajal) vêm discorrendo acerca da causalidade do que, afinal e mais geralmente, é o nosso atraso social, cívico, cultural, científico e

tecnológico. Para nós, essa causalidade é bem complexa, mas talvez nela sobressaiam três aspectos *complementares,* que seriam os seguintes:

Primeiro: A omnipotência e a omnipresença da Inquisição no seio das famílias e das instituições no decurso de três séculos.

Segundo. A natureza absolutista e aristocrático-militar do Estado Português desde a governação de D. João II até à Convenção de Évora Monte (1834).

Terceiro. A ausência de muitas indústrias produtivas e correspondentes ensinos, na sequência da exploração económica dos Descobrimentos.

III

Bibliografia sobre história da matemática e matemáticos em Portugal

Albuquerque, Luís de, *Estudos de História,* 6 vols., Coimbra, 1974-78; *Curso de História da Náutica,* Coimbra, 1972; *Ciência e Experiência nos Descobrimentos Portugueses,* «Biblioteca Breve», n.° 73, Lisboa.

Brignole, Diana, «António Aniceto Monteiro», in *Revista de la Unión Matemática Argentina,* vol. 30, 1981.

Carvalho, Joaquim de, *Obras Completas,* vol. V, Fundação Calouste Gulbenkian, 1987.

Cunha, Pedro José da, *Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal,* Exposição Portuguesa em Sevilha, 1929; *Nota ao Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal,* Imprensa Nacional de Lisboa, 1929.

Dionísio, J. J., «No centenário de Daniel Augusto da Silva», in *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências,* t. XXII, 1978-79.

Ferreira, Jaime Campos, «Alguns aspectos da vida e da obra de José Sebastião e Silva», in *Jornal de Matemática Elementar,* n.° 87, Abril de 1989.

Gonçalves, J. Vicente, «Análise do livro VIIII *dos Princípios Mathematicos,* de José Anastácio da Cunha», in *Congresso do Mundo Português,* vol. XII, t. I, 1940; «Elogio histórico de Pedro José da Cunha», in *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências,* t. IX, 1962; «O Professor António Almeida Costa», *ibid.*, t. XVII, 1974; «Relações entre José Anastácio da Cunha e Monteiro da Rocha, 1773-1786», *ibid.*, t. XXI, 1976-77.

Gomes, Ruy Luís, «Tentativas feitas nos anos 40 para criar no Porto uma Escola de Matemática», in *Bol. Soc. Port. de Matem.*, n.° 6, Outubro de 1983.

Guimarães, Rodolfo, *Les Mathématiques en Portugal au XIXe siècle*, Coimbra, 1907-08.

Morgado, José, «O Professor Ruy Luís Gomes e o movimento matemático português», in *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, vol. 67, 1986, pp. 97-151; «Hugo Baptista Ribeiro (1910-1988)», in *Bol. Soc. Port. de Matemática*, n.° 12, 1989; «Para a história da álgebra em Portugal — I», in *Gazeta de Matemática*, n.° 137, Setembro de 1990, pp. 3-21.

Oliveira, A. J. Franco de, «Anastácio da Cunha and the concept of convergent series», in *Arch. for Hist. of Exact Sciences*, vol. 39, n.° 1, 1988, pp. 1-12.

Oliveira, J. Silva, «Daniel Augusto da Silva», in *Bol. Soc. Port. de Matem.*, n.° 2, 1979.

Oliveira, J. Tiago de, *O Essencial sobre a História da Matemática em Portugal*, Imprensa Nacional — Casa da Moeda, 1989; «A produção matemática portuguesa no século XIX; comparação com o século XVI», in *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências*, t. XXIV, 1981-82; «Elogio histórico de Vicente Gonçalves», *ibid.*, t. XXVIII, 1987.

Queiró, João Filipe, «José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner», in *The Math. Intelligencer*, vol. 10, 1988.

Rey Pastor, Julio, *La Ciencia y la Técnica en el Descubrimiento de América*, «Colecção Austral», 1942.

Ribeiro, Aquilino, *Anastácio da Cunha, O Lente Penitenciado*, Lisboa, 1938.

Silva, Luciano Pereira da, *Obras Completas*, 3 vols., Agência-Geral das Colónias, 1943-44-45.

Stockler, Francisco de Borja Garção, *Ensaio Histórico sobre a Origem e Progressos das Matemáticas em Portugal*, Paris, 1819.

Teixeira, Francisco Gomes, *Panegíricos e Conferências*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1925; *História das Matemáticas em Portugal*, Academia das Ciências de Lisboa, 1934.

Vasconcelos, Fernando de Almeida, *História das Matemáticas na Antiguidade*, Bertrand, 1925.

Vilhena, Henrique de, *O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira*, Lisboa, 1936.

OBRAS COLECTIVAS

«Notícia biográfica do matemático António Aniceto Monteiro (1907-1980)», por H. Ribeiro, R. Luís Gomes e L. Neves Real, L. Nachbin, E. Ortiz, A. Pereira Gomes, in *Portugaliæ Mathematica*, vol. 39, 1980, pp. I-LI.

História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal, 2 vols., Academia das Ciências de Lisboa, 1986.

Textos sobre Matemática e Matemáticos em Portugal (org. por P. Almeida, J. M. Ferreira e A. J. F. Oliveira), Soc. Port. de Mat., 1988; *Textos sobre Lógica em Portugal* (id.), Soc. Port. de Mat., 1989.

Anastácio da Cunha, 1744-1787, o Matemático e o Poeta, Imprensa Nacional — Casa da Moeda, 1990.

Concluiu-se
em Abril de 1992